Soutenance de thèse

Sur l'équivalence orbitale quantitative entre groupes moyennables

Corentin Correia

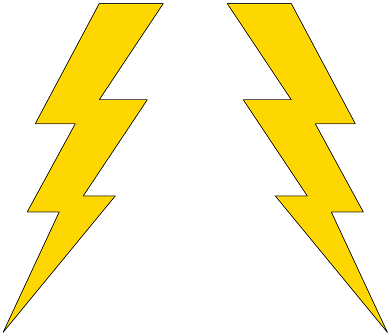
sous la direction de François Le Maître et Romain Tessera

11 décembre 2025

Université Paris Cité

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES JUSSIEU - PARIS RIVE GAUCHE

Équivalence orbitale quantitative

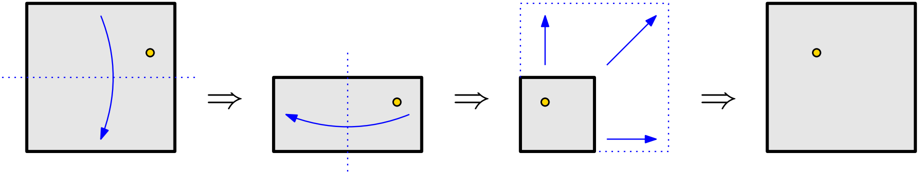


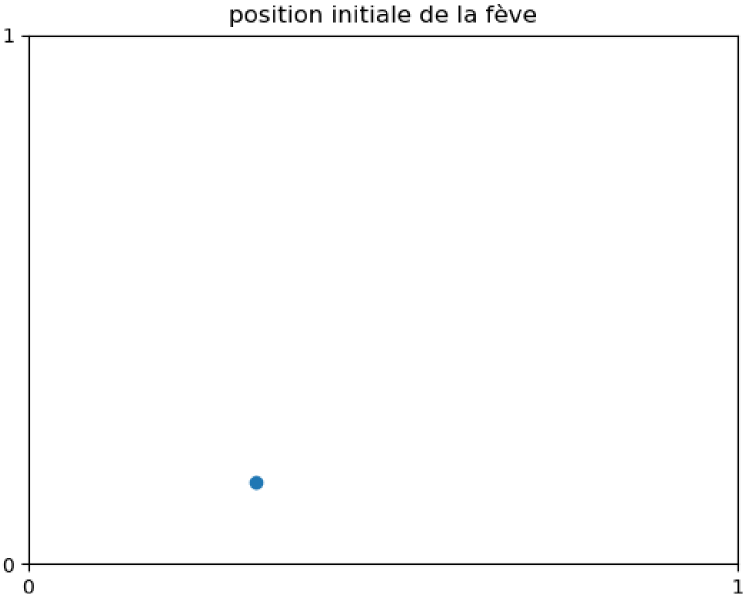
Théorie ergodique Géométrie des groupes

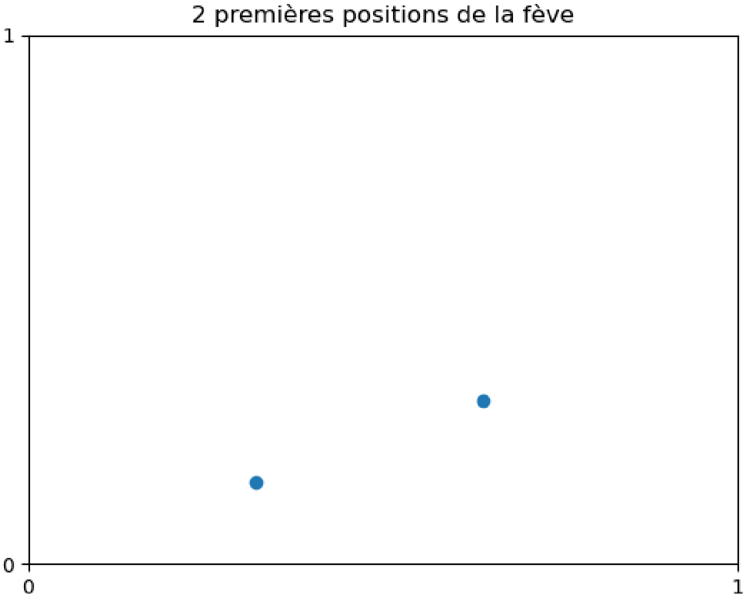
Concentrons-nous sur l'aspect « Théorie ergodique » !

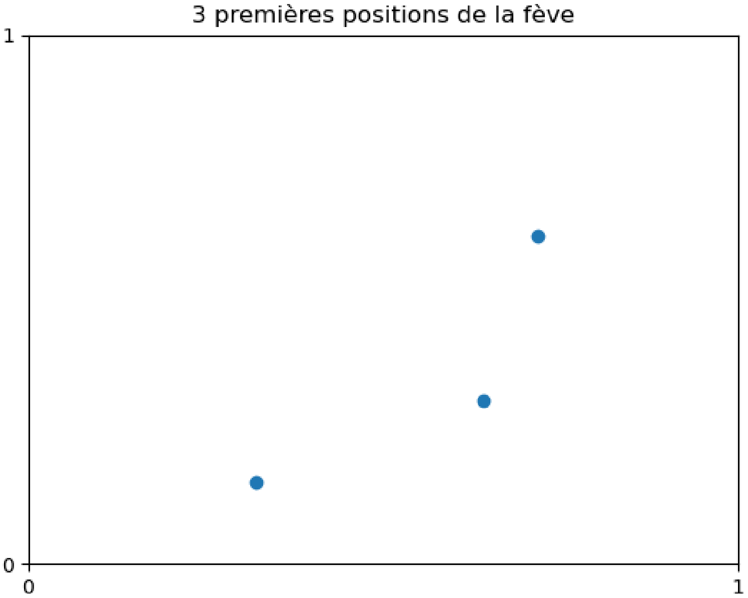
La théorie ergodique, quel intérêt ?

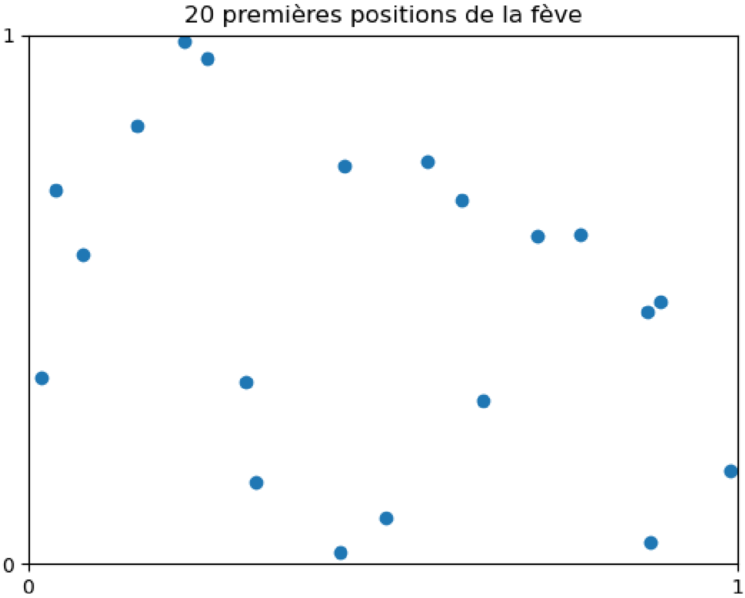
Exemple concret :
On prépare la pâte de la galette des rois, mais on a placé la fève dès le début.

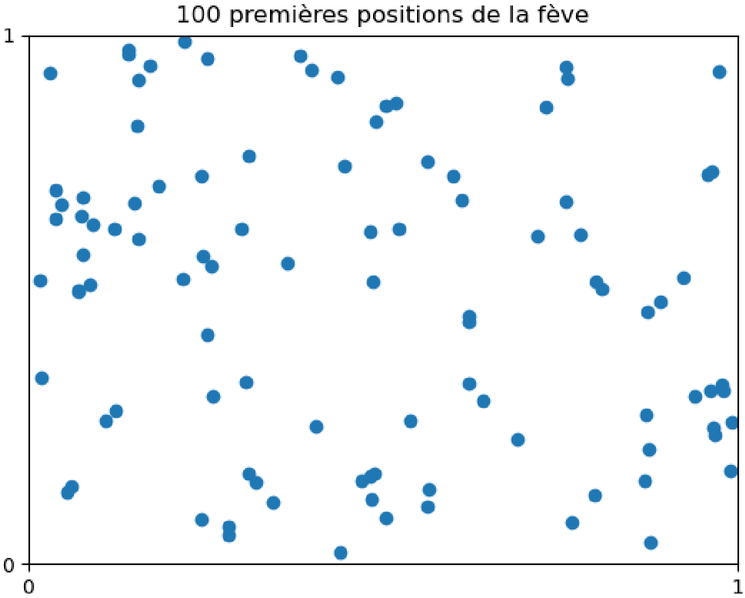


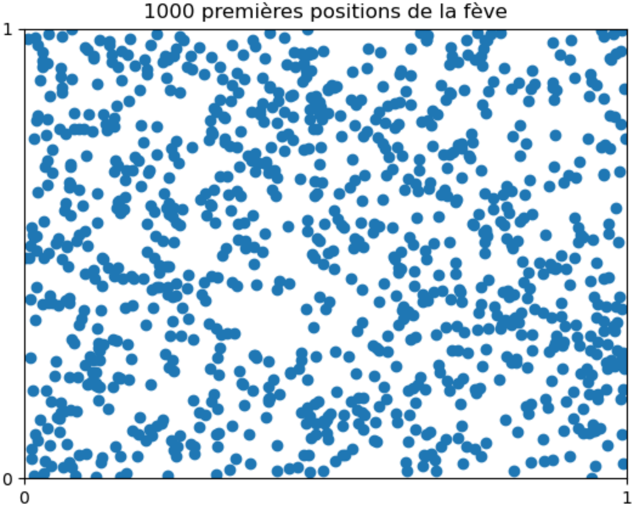

position initiale de la fève
1
0
0
1


2 premières positions de la fève
1
0
0
1


3 premières positions de la fève
1
0
0
1


20 premières positions de la fève
1
0
0
1


100 premières positions de la fève
1
0
0
1



$\longrightarrow$ **répartition uniforme**

Plus généralement : on considère une fonction $T\colon X \to X$ et on regarde la suite de points x, $T(x)$, $T(T(x))$, $T(T(T(x)))$, ...

Plus généralement : on considère une fonction $T \colon X \to X$ et on regarde la suite de points x, $T(x)$, $T(T(x))$, $T(T(T(x)))$, ...

Exemple de la galette :

- $X =$ le carré
- $x =$ la position initiale de la fève dans le carré
- $T(x) =$ la nouvelle position de la fève après une étape de transformation de la pâte

Plus généralement : on considère une fonction $T\colon X \to X$ et on regarde la suite de points x, $T(x)$, $T(T(x))$, $T(T(T(x)))$, ...

Exemple de la galette :

- $X =$ le carré
- $x =$ la position initiale de la fève dans le carré
- $T(x) =$ la nouvelle position de la fève après une étape de transformation de la pâte

Les mesures de probabilités T-invariantes donnent des **informations plus qualitatives**.

(Exemple de la galette : la mesure de probabilité uniforme sur le carré)

Cadre général

(X, μ) espace de probabilité standard et sans atome $\quad \cong ([0,1], \mathrm{Leb})$

$$\mathrm{Aut}(X, \mu) = \Big\{ T \colon X \to X \text{ bijection bimesurable, } \underbrace{\mu(T^{-1}(.)) = \mu(.)}_{\textbf{pmp}} \Big\} / \mu$$

pmp : **p**réservant la **m**esure de **p**robabilité

Cadre général

(X, μ) espace de probabilité standard et sans atome $\quad \cong ([0,1], \mathrm{Leb})$

$$\mathrm{Aut}(X,\mu) = \Big\{ T\colon X \to X \text{ bijection bimesurable, } \underbrace{\mu(T^{-1}(.)) = \mu(.)}_{\textbf{pmp}} \Big\}/\mu$$

pmp : **p**réservant la **m**esure de **p**robabilité
$T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ appelé « transformation », « système », « système dynamique »

⚠ Ici, toutes les transformations sont **inversibles** !

Cadre général

(X, μ) espace de probabilité standard et sans atome $\cong ([0,1], \mathrm{Leb})$

$$\mathrm{Aut}(X, \mu) = \Big\{ T \colon X \to X \text{ bijection bimesurable, } \underbrace{\mu(T^{-1}(.)) = \mu(.)}_{\textbf{pmp}} \Big\} / \mu$$

pmp : **p**réservant la **m**esure de **p**robabilité
$T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ appelé « transformation », « système », « système dynamique »

⚠ Ici, toutes les transformations sont **inversibles** !

Définition

$T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ est **ergodique** si les parties mesurables $A \subset X$ vérifiant $\mu(A \,\Delta\, T(A)) = 0$ satisfont $\mu(A) = 0$ ou 1.

Cadre général

(X, μ) espace de probabilité standard et sans atome $\cong ([0,1], \mathrm{Leb})$

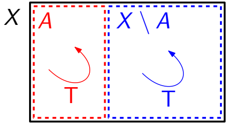
$$\mathrm{Aut}(X,\mu) = \Big\{ T \colon X \to X \text{ bijection bimesurable, } \underbrace{\mu(T^{-1}(.)) = \mu(.)}_{\textbf{pmp}} \Big\} / \mu$$

pmp : **p**réservant la **m**esure de **p**robabilité
$T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ appelé « transformation », « système », « système dynamique »
⚠ Ici, toutes les transformations sont **inversibles** !

Définition

$T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ est **ergodique** si les parties mesurables $A \subset X$ vérifiant $\mu(A \,\Delta\, T(A)) = 0$ satisfont $\mu(A) = 0$ ou 1.

Autrement dit, si on a cette décomposition :

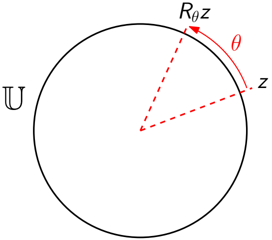


alors A ou $X \setminus A$ est négligeable.

- **Rotation irrationnelle** d'angle irrationnel θ :

$$R_\theta \colon z \in \mathbb{U} \mapsto z e^{2i\pi\theta} \in \mathbb{U},$$

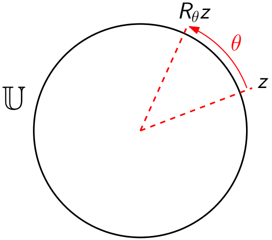
μ : mesure de Lebesgue sur le cercle $\mathbb{U}$.



- **Rotation irrationnelle** d'angle irrationnel θ :

$$R_\theta \colon z \in \mathbb{U} \mapsto ze^{2i\pi\theta} \in \mathbb{U},$$

μ : mesure de Lebesgue sur le cercle $\mathbb{U}$.



- Σ alphabet fini, ν mesure de probabilité sur Σ.
  Le **décalage de Bernoulli** sur (Σ, ν) :

$$T \colon (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma^{\mathbb{Z}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma^{\mathbb{Z}}, \text{ muni de } \mu = \nu^{\otimes\mathbb{Z}}.$$

- **Odomètres :**


CE M21 0102
9 DEL21 4705 4774
Deltamess Sebenter Weg 42 23758 Oldenburg
00070172 m³
Zählertausch 2026
DE-17-MI001-PTB008
T30/90
R40
DVGW

- **Odomètres :**

$X = \prod_{n \geq 0} \{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$ avec $q_n \geq 2$;

- **Odomètres :**

$X = \prod_{n \geq 0} \{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$ avec $q_n \geq 2$;
$\mu = \prod_{n \geq 0} \nu_n$ où ν_n est la mesure uniforme sur $\{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$;

- **Odomètres :**

$X = \prod_{n\geq 0} \{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$ avec $q_n \geq 2$;
$\mu = \prod_{n\geq 0} \nu_n$ où ν_n est la mesure uniforme sur $\{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$;

$$\begin{array}{rccl} S : & X & \longrightarrow & X \\ & (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & (x_n)_{n\geq 0} + (1, 0, 0, 0, \ldots) \text{ avec retenue} \end{array}$$

- **Odomètres :**

$X = \prod_{n \geq 0} \{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$ avec $q_n \geq 2$;
$\mu = \prod_{n \geq 0} \nu_n$ où ν_n est la mesure uniforme sur $\{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$;

$$\begin{array}{rccl} S : & X & \longrightarrow & X \\ & (x_n)_{n \geq 0} & \longmapsto & (x_n)_{n \geq 0} + (1, 0, 0, 0, \ldots) \text{ avec retenue} \end{array}$$

Exemple (Odomètre dyadique : $q_n = 2$ pour tout $n \geq 0$)

$$S({\color{red}1, 1, 0, 0, 1, \ldots}) = ({\color{blue}0, 0, 1, 0, 1, \ldots})$$

$$\begin{array}{cccccccc} & & 1 & 1 & & & \\ & {\color{red}1} & {\color{red}1} & {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}1} & \ldots \\ + & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \hline & {\color{blue}0} & {\color{blue}0} & {\color{blue}1} & {\color{blue}0} & {\color{blue}1} & \ldots \end{array}$$

- **Odomètres :**

$X = \prod_{n\geq 0}\{0,1,\ldots,q_n-1\}$ avec $q_n \geq 2$;
$\mu = \prod_{n\geq 0}\nu_n$ où ν_n est la mesure uniforme sur $\{0,1,\ldots,q_n-1\}$;

$$\begin{array}{rccl} S: & X & \longrightarrow & X \\ & (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & (x_n)_{n\geq 0} + (1,0,0,0,\ldots) \text{ avec retenue} \end{array}$$

Exemple (Odomètre dyadique : $q_n = 2$ pour tout $n \geq 0$)

$S({\color{red}1,1,0,0,1,\ldots}) = ({\color{blue}0,0,1,0,1,\ldots})$

$$\begin{array}{cccccccc} & & 1 & 1 & & & \\ & {\color{red}1} & {\color{red}1} & {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}1} & \ldots \\ + & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \hline & {\color{blue}0} & {\color{blue}0} & {\color{blue}1} & {\color{blue}0} & {\color{blue}1} & \ldots \end{array}$$

$S(q_0-1, q_1-1, q_2-1, \ldots) = (0,0,0,\ldots)$.

- **Odomètres :**

$X = \prod_{n \geq 0} \{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$ avec $q_n \geq 2$;
$\mu = \prod_{n \geq 0} \nu_n$ où ν_n est la mesure uniforme sur $\{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$;

$$\begin{array}{rccl} S : & X & \longrightarrow & X \\ & (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & (x_n)_{n \geq 0} + (1, 0, 0, 0, \ldots) \text{ avec retenue} \end{array}$$

Exemple (Odomètre dyadique : $q_n = 2$ pour tout $n \geq 0$)

$S(1, 1, 0, 0, 1, \ldots) = (0, 0, 1, 0, 1, \ldots)$

$$\begin{array}{rcccccc} & & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ + & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots \end{array}$$

$S(q_0 - 1, q_1 - 1, q_2 - 1, \ldots) = (0, 0, 0, \ldots)$.

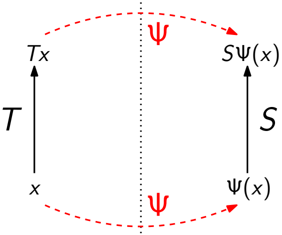
Odomètre **universel** : lorsque tout nombre premier p divise q_n pour une infinité d'entiers $n \geq 0$.

Le problème de la conjugaison

But : Comparer les éléments de $\mathrm{Aut}(X, \mu)$.

Définition

T et $S \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ sont **conjuguées** s'il existe $\Psi \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ telle que $\Psi(Tx) = S\Psi(x)$ pour μ-presque tout $x \in X$.

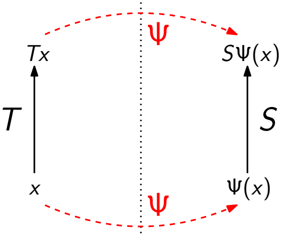


Le problème de la conjugaison

But : Comparer les éléments de $\mathrm{Aut}(X, \mu)$.

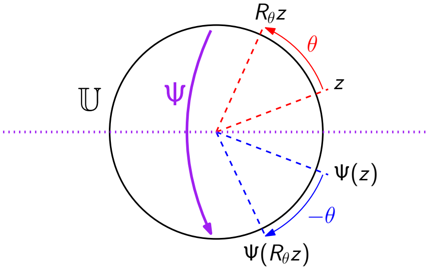
Définition

T et $S \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ sont **conjuguées** s'il existe $\Psi \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ telle que $\Psi(Tx) = S\Psi(x)$ pour μ-presque tout $x \in X$.

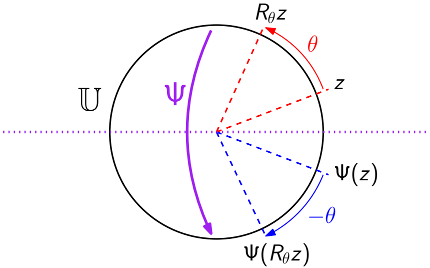


Invariants de conjugaison : ergodicité, propriétés de mélange, entropie, valeurs propres, ...

R_θ et $R_{-\theta}$ sont conjuguées, via $\Psi\colon z \in \mathbb{U} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{U}$.



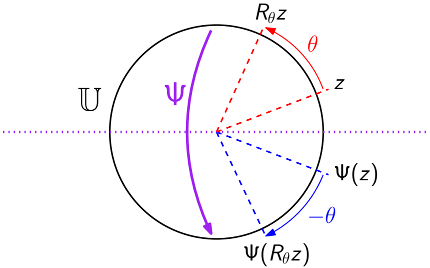
R_θ et $R_{-\theta}$ sont conjuguées, via $\Psi\colon z \in \mathbb{U} \mapsto \overline{z} \in \mathbb{U}$.



Quelques **rares** résultats de **classification à conjugaison près** :

- [Ornstein] Deux **décalages de Bernoulli** sont conjugués si et seulement s'ils ont la **même entropie**.

R_θ et $R_{-\theta}$ sont conjuguées, via $\Psi\colon z \in \mathbb{U} \mapsto \overline{z} \in \mathbb{U}$.



Quelques **rares** résultats de **classification à conjugaison près** :

- [Ornstein] Deux **décalages de Bernoulli** sont conjugués si et seulement s'ils ont la **même entropie**.
- [Halmos–von Neumann] Deux systèmes ergodiques à ***spectre discret*** (ex : rotations irrationnelles, odomètres) sont conjugués si et seulement s'ils ont les **mêmes valeurs propres**.

Mais en toute généralité, le problème de la conjugaison est TRÈS compliqué !

Équivalence orbitale

La conjugaison demande $\Psi(Tx) = S\Psi(x)$

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \bullet \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Psi"] & \bullet \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Psi"] & \bullet \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Psi"] & \bullet \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Psi"] & \bullet \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Psi"] & \bullet \arrow[d, "\Psi"] & \cdots \\
\cdots & \bullet \arrow[r, "S"'] & \bullet \arrow[r, "S"'] & \bullet \arrow[r, "S"'] & \bullet \arrow[r, "S"'] & \bullet \arrow[r, "S"'] & \bullet & \cdots
\end{tikzcd}$$

Notation : $\mathrm{Orb}_T(x) = \{T^n x \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Équivalence orbitale

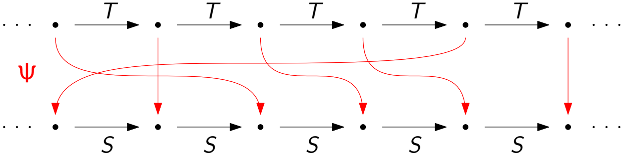
La conjugaison demande $\Psi(Tx) = S\Psi(x)$

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \bullet \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Psi"] & \bullet \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Psi"] & \bullet \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Psi"] & \bullet \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Psi"] & \bullet \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Psi"] & \bullet \arrow[d, "\Psi"] & \cdots \\
\cdots & \bullet \arrow[r, "S"'] & \bullet \arrow[r, "S"'] & \bullet \arrow[r, "S"'] & \bullet \arrow[r, "S"'] & \bullet \arrow[r, "S"'] & \bullet & \cdots
\end{tikzcd}$$

Notation : $\mathrm{Orb}_T(x) = \{T^n x \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Définition (Dye 1959)

T et $S \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ sont **orbitalement équivalentes (OE)** s'il existe $\Psi \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ telle que $\Psi(\mathrm{Orb}_T(x)) = \mathrm{Orb}_S(\Psi(x))$ pour μ-presque tout $x \in X$.



Question

Quelles propriétés dynamiques des actions sont préservées (ergodicité, entropie, mélange, spectre,...) ?

Question

Quelles propriétés dynamiques des actions sont préservées (ergodicité, entropie, mélange, spectre,...) ?

Un invariant d'équivalence orbitale entre actions : l'ergodicité.

Question

Quelles propriétés dynamiques des actions sont préservées (ergodicité, entropie, mélange, spectre,...) ?

Un invariant d'équivalence orbitale entre actions : l'ergodicité.

Réciproque :

Théorème (Dye 1959)

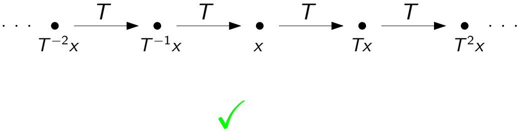
Toutes les transformations ergodiques de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$ sont orbitalement équivalentes.

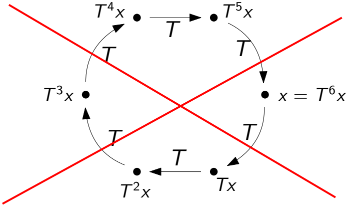
$\rightarrow$ affaiblissement trop fort du problème de la conjugaison entre deux transformations de $\mathrm{Aut}(X,\mu)$.

But : Trouver des **renforcements** de l'équivalence orbitale

Définition

$T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ est **apériodique** si pour presque tout $x \in X$, pour tout $n \neq 0$, $T^n(x) \neq x$.





Propriété

Ergodique $\Rightarrow$ apériodique.

Soient $T, S \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ apériodiques, soit Ψ une équivalence orbitale

$$\Psi(\mathrm{Orb}_T(x)) = \mathrm{Orb}_S(\Psi(x))$$

Soient $T, S \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ apériodiques, soit Ψ une équivalence orbitale

$$\Psi(\mathrm{Orb}_T(x)) = \mathrm{Orb}_S(\Psi(x))$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$\Psi(Tx) \in \{S^n \Psi(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Soient $T, S \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ apériodiques, soit Ψ une équivalence orbitale

$$\Psi(\mathrm{Orb}_T(x)) = \mathrm{Orb}_S(\Psi(x))$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$\Psi(Tx) \in \{S^n \Psi(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$
$\rightarrow \Psi(Tx) = S^{c_T(x)} \Psi(x)$

Soient $T, S \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ apériodiques, soit Ψ une équivalence orbitale

$$\Psi(\mathrm{Orb}_T(x)) = \mathrm{Orb}_S(\Psi(x))$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$\Psi(Tx) \in \{S^n \Psi(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$
$\to \Psi(Tx) = S^{c_T(x)}\Psi(x)$

$S(\Psi(x)) \in \{\Psi(T^n(x)) \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Soient $T, S \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ apériodiques, soit Ψ une équivalence orbitale

$$\Psi(\mathrm{Orb}_T(x)) = \mathrm{Orb}_S(\Psi(x))$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$

$\Psi(Tx) \in \{S^{n}\Psi(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$
$\to \Psi(Tx) = S^{c_T(x)}\Psi(x)$

$S(\Psi(x)) \in \{\Psi(T^{n}(x)) \mid n \in \mathbb{Z}\}$
$\to S(\Psi(x)) = \Psi(T^{c_S(x)}(x))$

Soient $T, S \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ apériodiques, soit Ψ une équivalence orbitale

$$\Psi(\mathrm{Orb}_T(x)) = \mathrm{Orb}_S(\Psi(x))$$

$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

$\Psi(Tx) \in \{S^n\Psi(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$
$\to \Psi(Tx) = S^{c_T(x)}\Psi(x)$

$S(\Psi(x)) \in \{\Psi(T^n(x)) \mid n \in \mathbb{Z}\}$
$\to S(\Psi(x)) = \Psi(T^{c_S(x)}(x))$

Définition

$c_T\colon X \to \mathbb{Z}$ et $c_S\colon X \to \mathbb{Z}$ sont les **cocycles** associés à l'équivalence orbitale Ψ.

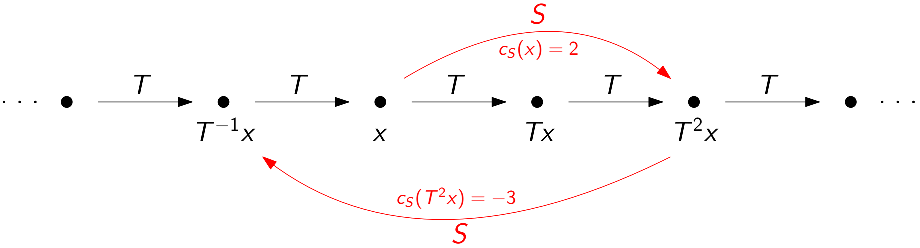
Exemple avec $\Psi = \mathrm{id}_X$:

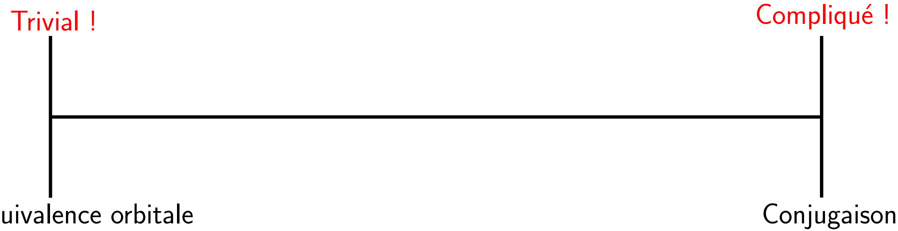
$$Tx = S^{c_T(x)}(x) \text{ et } Sx = T^{c_S(x)}(x)$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \bullet \arrow[r, "T"] & T^{-1}x \arrow[r, "T"] & x \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend left, "S", "c_S(x)=2"'] & Tx \arrow[r, "T"] & T^2x \arrow[r, "T"] \arrow[lll, bend left, "c_S(T^2x)=-3"', "S"] & \bullet \cdots
\end{tikzcd}$$

Exemple avec $\Psi = \mathrm{id}_X$:

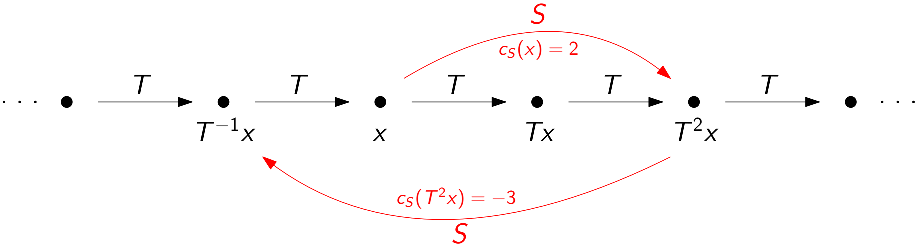
$$Tx = S^{c_T(x)}(x) \text{ et } Sx = T^{c_S(x)}(x)$$

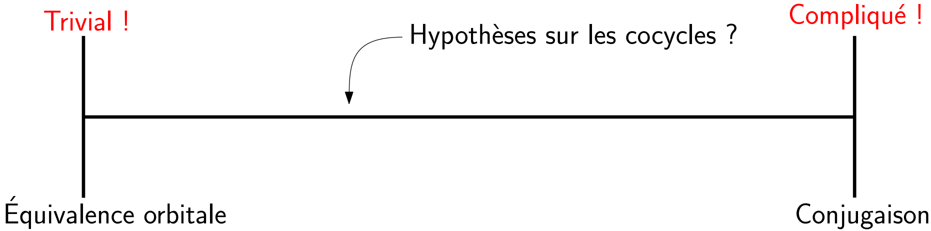




Exemple avec $\Psi = \mathrm{id}_X$:

$$Tx = S^{c_T(x)}(x) \text{ et } Sx = T^{c_S(x)}(x)$$





Équivalence orbitale quantitative **(1/2)**

Soient $T, S \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ apériodiques, soit $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Définition (Carderi–Joseph–Le Maître–Tessera 2023)

On dit que T et S sont **φ-OE** s'il existe une équivalence orbitale dont les cocycles sont φ-intégrables :

- $\displaystyle\int_X \varphi(|c_T(x)|)\mathrm{d}\mu(x) < +\infty$;
- $\displaystyle\int_X \varphi(|c_S(x)|)\mathrm{d}\mu(x) < +\infty$.

Équivalence orbitale quantitative (1/2)

Soient $T, S \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ apériodiques, soit $\varphi \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Définition (Carderi–Joseph–Le Maître–Tessera 2023)

On dit que T et S sont **φ-OE** s'il existe une équivalence orbitale dont les cocycles sont φ-intégrables :

- $\displaystyle\int_X \varphi(|c_T(x)|)\mathrm{d}\mu(x) < +\infty$;
- $\displaystyle\int_X \varphi(|c_S(x)|)\mathrm{d}\mu(x) < +\infty$.

Remarques :

- Si $\varphi(x) \underset{x \to +\infty}{=} O(\psi(x))$, alors ψ-OE $\Longrightarrow$ φ-OE.

Équivalence orbitale quantitative (1/2)

Soient $T, S \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ apériodiques, soit $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Définition (Carderi–Joseph–Le Maître–Tessera 2023)

On dit que T et S sont φ-**OE** s'il existe une équivalence orbitale dont les cocycles sont φ-intégrables :

- $\displaystyle\int_X \varphi(|c_T(x)|)\mathrm{d}\mu(x) < +\infty$;
- $\displaystyle\int_X \varphi(|c_S(x)|)\mathrm{d}\mu(x) < +\infty$.

Remarques :

- Si $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(\psi(x))$, alors ψ-OE $\Longrightarrow$ φ-OE.
- Inégalité de Markov ($\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante) :

$$\mu(|c_T| > n) \leq \frac{I}{\varphi(n)} \text{ où } I = \int_X \varphi(|c_T(x)|)\mathrm{d}\mu(x) < +\infty.$$

Équivalence orbitale quantitative **(2/2)**

$c_T : X \to \mathbb{Z}$
$\rightsquigarrow$ partition dénombrable et mesurable $\{c_T^{-1}(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Équivalence orbitale quantitative (2/2)

$c_T : X \to \mathbb{Z}$
$\rightsquigarrow$ partition dénombrable et mesurable $\{c_T^{-1}(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Définition (Entropie de la partition de c_T)

$$\mathrm{H}_\mu(c_T) := -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(c_T^{-1}(n)) \log \mu(c_T^{-1}(n)) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Équivalence orbitale quantitative (2/2)

$c_T : X \to \mathbb{Z}$
$\rightsquigarrow$ partition dénombrable et mesurable $\{c_T^{-1}(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Définition (Entropie de la partition de c_T)

$$\mathrm{H}_\mu(c_T) := -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(c_T^{-1}(n)) \log \mu(c_T^{-1}(n)) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Intuitivement :
Si $x \in X$ est aléatoire, de loi μ,
$H(c_T)$ mesure l'incertitude sur la valeur de $c_T(x)$.

Équivalence orbitale quantitative (2/2)

$c_T : X \to \mathbb{Z}$
$\rightsquigarrow$ partition dénombrable et mesurable $\{c_T^{-1}(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Définition (Entropie de la partition de c_T)

$$\mathrm{H}_\mu(c_T) := -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(c_T^{-1}(n)) \log \mu(c_T^{-1}(n)) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Intuitivement :
Si $x \in X$ est aléatoire, de loi μ,
$H(c_T)$ mesure l'incertitude sur la valeur de $c_T(x)$.

Définition (Kerr–Li 2023)

On dit que T et S sont **Shannon OE** si $\mathrm{H}_\mu(c_T) < +\infty$ et $\mathrm{H}_\mu(c_S) < +\infty$.

1re tentative : cocycles intégrables.

1re tentative : cocycles intégrables.

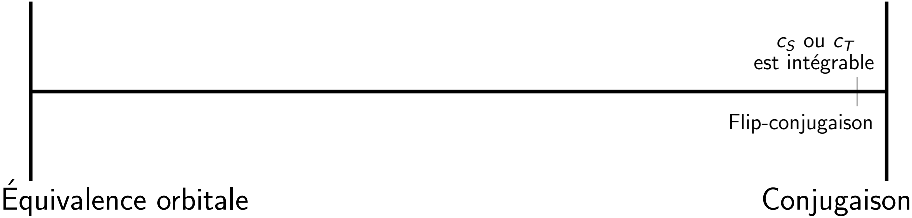
Théorème (Belinskaya 1969)

Soient $T, S \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ *ergodiques.*
S'il existe une équivalence orbitale telle que l'un des cocycles est intégrable, alors T *et* S *sont flip-conjuguées (*T *est conjuguée à* S *ou à* S^{-1}*).*

1re tentative : cocycles intégrables.

Théorème (Belinskaya 1969)

Soient $T, S \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ ergodiques.
S'il existe une équivalence orbitale telle que l'un des cocycles est intégrable, alors T et S sont flip-conjuguées (T est conjuguée à S ou à S^{-1}).



2nde tentative : cocycles φ-intégrables, φ sous-linéaire.

2nde tentative : cocycles φ-intégrables, φ sous-linéaire.

Théorème ()

Soient $S \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ ergodique et $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sous-linéaire.
Supposons que S vérifie l'une des deux hypothèses :

-
-

Alors il existe $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ telle que T et S sont φ-OE mais pas flip-conjuguées.

2nde tentative : cocycles φ-intégrables, φ sous-linéaire.

Théorème (Carderi–Joseph–Le Maître–Tessera 2023)

Soient $S \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ ergodique et $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sous-linéaire.
Supposons que S vérifie l'une des deux hypothèses :

- *il existe $n \geq 2$ tel que S^n est ergodique ;*
-

Alors il existe $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ telle que T et S sont φ-OE mais pas flip-conjuguées.

2nde tentative : cocycles φ-intégrables, φ sous-linéaire.

Théorème (Carderi–Joseph–Le Maître–Tessera 2023, C. 2025+)

Soient $S \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ ergodique et $\varphi \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sous-linéaire.
Supposons que S vérifie l'une des deux hypothèses :

- *il existe $n \geq 2$ tel que S^n est ergodique ;*
- *S est un odomètre.*

Alors il existe $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ telle que T et S sont φ-OE mais pas flip-conjuguées.

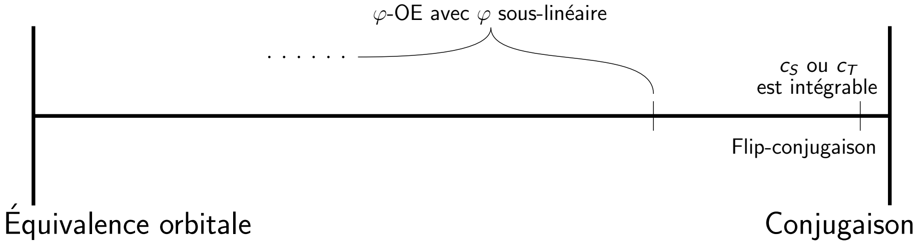
2nde tentative : cocycles φ-intégrables, φ sous-linéaire.

Théorème (Carderi–Joseph–Le Maître–Tessera 2023, C. 2025+)

Soient $S \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ ergodique et $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sous-linéaire.
Supposons que S vérifie l'une des deux hypothèses :

- *il existe $n \geq 2$ tel que S^n est ergodique ;*
- *S est un odomètre.*

Alors il existe $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ telle que T et S sont φ-OE mais pas flip-conjuguées.



Théorème (Kerr–Li 2023)

Si T et $S \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ sont Shannon OE, alors $\mathrm{h}_\mu(T) = \mathrm{h}_\mu(S)$.

Théorème (Kerr–Li 2023)

Si T et $S \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ sont Shannon OE, alors $\mathrm{h}_\mu(T) = \mathrm{h}_\mu(S)$.

Théorème (Carderi–Joseph–Le Maître–Tessera 2023)

Si T et $S \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ sont log*-OE, alors elles sont Shannon OE.*

$\rightarrow$ Si $\varphi \geq \log$, alors l'équivalence orbitale φ-intégrable préserve l'entropie.

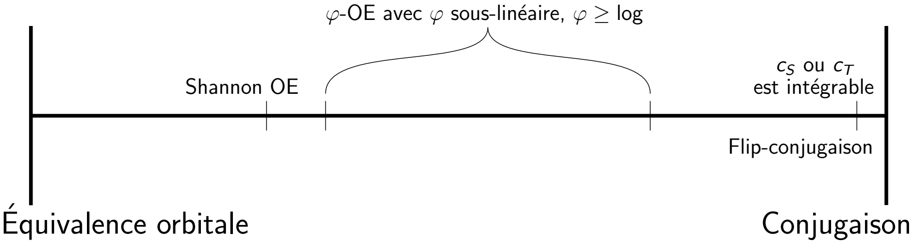
Théorème (Kerr–Li 2023)

Si T et $S \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ sont Shannon OE, alors $\mathrm{h}_\mu(T) = \mathrm{h}_\mu(S)$.

Théorème (Carderi–Joseph–Le Maître–Tessera 2023)

Si T et $S \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ sont log*-OE, alors elles sont Shannon OE.*

$\rightarrow$ Si $\varphi \geq \log$, alors l'équivalence orbitale φ-intégrable préserve l'entropie.



Théorème (Kerr–Li 2023)

L'odomètre universel est Shannon OE à tout odomètre.

Théorème (Kerr–Li 2023)

L'odomètre universel est Shannon OE à tout odomètre.

Généralisations aux tranformations de rang un

- ressemblent aux odomètres (extension du théorème de Kerr et Li) ;

Théorème (Kerr–Li 2023)

L'odomètre universel est Shannon OE à tout odomètre.

Généralisations aux tranformations de rang un

- ressemblent aux odomètres (extension du théorème de Kerr et Li) ;
- ont des propriétés dynamiques beaucoup plus variées (résultats de flexibilité)

Théorème (Kerr–Li 2023)

L'odomètre universel est Shannon OE à tout odomètre.

Généralisations aux tranformations de rang un

- ressemblent aux odomètres (extension du théorème de Kerr et Li) ;
- ont des propriétés dynamiques beaucoup plus variées (résultats de flexibilité)

Théorème (C. 2025)

Soit $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $\varphi(t) = o(t^{1/3})$. L'ensemble des transformations qui sont φ-OE à l'odomètre universel contient :

- *les odomètres ;*

Théorème (Kerr–Li 2023)

L'odomètre universel est Shannon OE à tout odomètre.

Généralisations aux tranformations de rang un

- ressemblent aux odomètres (extension du théorème de Kerr et Li) ;
- ont des propriétés dynamiques beaucoup plus variées (résultats de flexibilité)

Théorème (C. 2025)

Soit $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $\varphi(t) = o(t^{1/3})$. L'ensemble des transformations qui sont φ-OE à l'odomètre universel contient :

- *les odomètres ;*
- *la transformation de Chacon (faiblement mélangeante mais pas fortement mélangeante) ;*

Théorème (Kerr–Li 2023)

L'odomètre universel est Shannon OE à tout odomètre.

Généralisations aux tranformations de rang un

- ressemblent aux odomètres (extension du théorème de Kerr et Li) ;
- ont des propriétés dynamiques beaucoup plus variées (résultats de flexibilité)

Théorème (C. 2025)

Soit $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *vérifiant* $\varphi(t) = o(t^{1/3})$*. L'ensemble des transformations qui sont* φ*-OE à l'odomètre universel contient :*

- *les odomètres ;*
- *la transformation de Chacon (faiblement mélangeante mais pas fortement mélangeante) ;*
- *une transformation de rang un fortement mélangeante ;*

Théorème (Kerr–Li 2023)

L'odomètre universel est Shannon OE à tout odomètre.

Généralisations aux tranformations de rang un

- ressemblent aux odomètres (extension du théorème de Kerr et Li) ;
- ont des propriétés dynamiques beaucoup plus variées (résultats de flexibilité)

Théorème (C. 2025)

Soit $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $\varphi(t) = o(t^{1/3})$. L'ensemble des transformations qui sont φ-OE à l'odomètre universel contient :

- *les odomètres ;*
- *la transformation de Chacon (faiblement mélangeante mais pas fortement mélangeante) ;*
- *une transformation de rang un fortement mélangeante ;*
- *R_θ pour θ irrationnel dans un sous-ensemble indénombrable dense de $\mathbb{R}$;*

Théorème (Kerr–Li 2023)

L'odomètre universel est Shannon OE à tout odomètre.

Généralisations aux tranformations de rang un

- ressemblent aux odomètres (extension du théorème de Kerr et Li) ;
- ont des propriétés dynamiques beaucoup plus variées (résultats de flexibilité)

Théorème (C. 2025)

Soit $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $\varphi(t) = o(t^{1/3})$. L'ensemble des transformations qui sont φ-OE à l'odomètre universel contient :

- *les odomètres ;*
- *la transformation de Chacon (faiblement mélangeante mais pas fortement mélangeante) ;*
- *une transformation de rang un fortement mélangeante ;*
- *R_θ pour θ irrationnel dans un sous-ensemble indénombrable dense de $\mathbb{R}$;*
- *pour tout θ irrationnel, une transformation de rang un admettant la valeur propre $e^{2i\pi\theta}$.*

Rappel : La log-OE préserve l'entropie.

Rappel : La log-OE préserve l'entropie.

Théorème (C. 2025+)

Soit S l'odomètre universel, soit $\alpha > 0$ ou $\alpha = +\infty$. Il existe $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ telle que :

- $\mathrm{h}_\mu(T) = \alpha$;
- *T et S sont* $\log^\beta$*-OE pour tout* $\beta < 1$.

NB : les odomètres sont d'entropie nulle.

Rappels :

Théorème (C. 2025+)

Soient $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction sous-linéaire et S un odomètre. Alors il existe $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ telle que T et S sont φ-OE mais pas flip-conjuguées.

Théorème (C. 2025+)

Soit S l'odomètre universel, soit $\alpha > 0$ ou $\alpha = +\infty$. Il existe $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ telle que :

- $\mathrm{h}_\mu(T) = \alpha$;
- *T et S sont $\log^\beta$-OE pour tout $\beta < 1$.*

Construction commune :

Rappels :

Théorème (C. 2025+)

Soient $\varphi \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction sous-linéaire et S un odomètre. Alors il existe $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ telle que T et S sont φ-OE mais pas flip-conjuguées.

Théorème (C. 2025+)

Soit S l'odomètre universel, soit $\alpha > 0$ ou $\alpha = +\infty$. Il existe $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ telle que :

- $\mathrm{h}_\mu(T) = \alpha$;
- *T et S sont $\log^\beta$-OE pour tout $\beta < 1$.*

Construction commune :

Odomètre S

Rappels :

Théorème (C. 2025+)

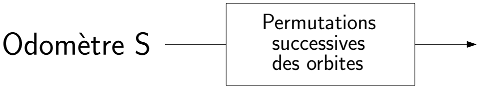
Soient $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction sous-linéaire et S un odomètre. Alors il existe $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ telle que T et S sont φ-OE mais pas flip-conjuguées.

Théorème (C. 2025+)

Soit S l'odomètre universel, soit $\alpha > 0$ ou $\alpha = +\infty$. Il existe $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ telle que :

- $\mathrm{h}_\mu(T) = \alpha$;
- *T et S sont $\log^\beta$-OE pour tout $\beta < 1$.*

Construction commune :



Rappels :

Théorème (C. 2025+)

Soient $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction sous-linéaire et S un odomètre. Alors il existe $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ telle que T et S sont φ-OE mais pas flip-conjuguées.

Théorème (C. 2025+)

Soit S l'odomètre universel, soit $\alpha > 0$ ou $\alpha = +\infty$. Il existe $T \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$ telle que :

- $\mathrm{h}_\mu(T) = \alpha$;
- *T et S sont $\log^\beta$-OE pour tout $\beta < 1$.*

Construction commune :

Odomètre S — [Permutations successives des orbites] → ☢ Odomutant T ☢

Odomètre S $\rightsquigarrow$ ☢ Odomutant T ☢

Dans cette section, nous allons :

- définir les odomutants ;

Odomètre S $\rightsquigarrow$ ☢ Odomutant T ☢

Dans cette section, nous allons :

- définir les odomutants ;
- démontrer une version plus faible du théorème sur l'entropie :

Odomètre S $\rightsquigarrow$ ☢ Odomutant T ☢

Dans cette section, nous allons :

- définir les odomutants ;
- démontrer une version plus faible du théorème sur l'entropie :

Théorème (C. 2025+, version plus faible)

Soit S l'odomètre universel. Il existe $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ telle que :

- $\mathrm{h}_\mu(T) > 0$;
- *T et S sont $\log^\beta$-OE pour tout $\beta < 1$.*

Rappel sur les odomètres :
$X = \prod_{n \geq 0} \{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$
$S \colon (x_n)_{n \geq 0} \in X \mapsto (x_n)_{n \geq 0} + (1, 0, 0, \ldots)$ avec retenue

Rappel sur les odomètres :
$X = \prod_{n \geq 0} \{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$
$S \colon (x_n)_{n \geq 0} \in X \mapsto (x_n)_{n \geq 0} + (1, 0, 0, \ldots)$ avec retenue

Structure combinatoire :

Définition (n-cylindres)

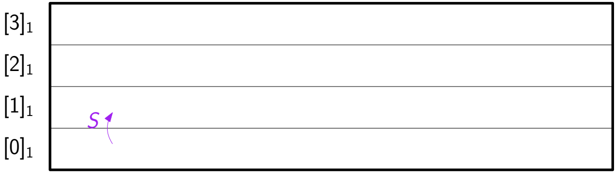
Pour $i_0 \in \{0, 1, \ldots, q_0 - 1\}, \ldots, i_{n-1} \in \{0, 1, \ldots, q_{n-1} - 1\}$,

$$[i_0, \ldots, i_{n-1}]_n \coloneqq \{(x_i)_{n \geq 0} \in X \mid x_0 = i_0, \ldots, x_{n-1} = i_{n-1}\}.$$

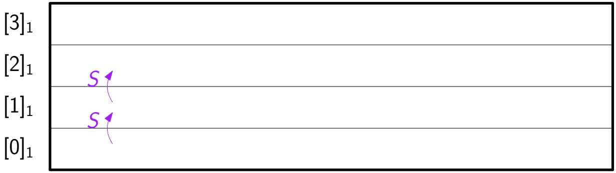
$q_0 = 4$

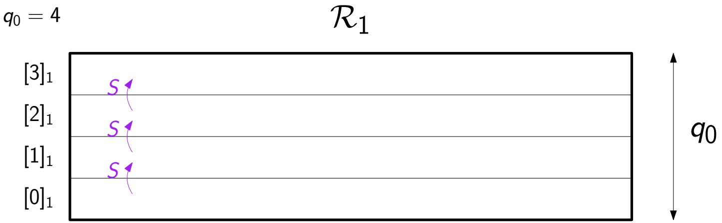
$[3]_1$	
$[2]_1$	
$[1]_1$	
$[0]_1$	

$q_0 = 4$

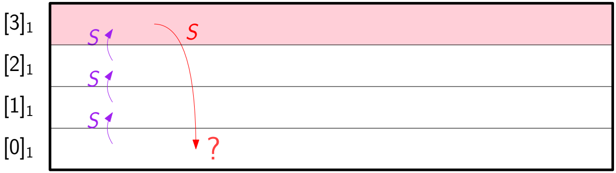


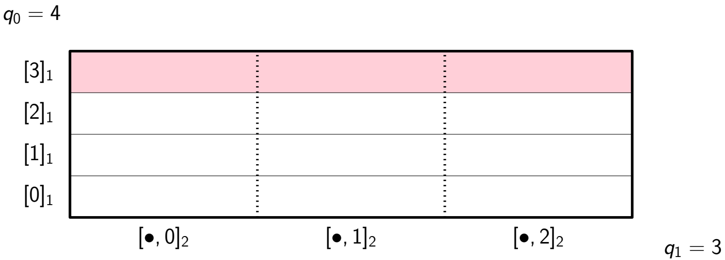
$q_0 = 4$

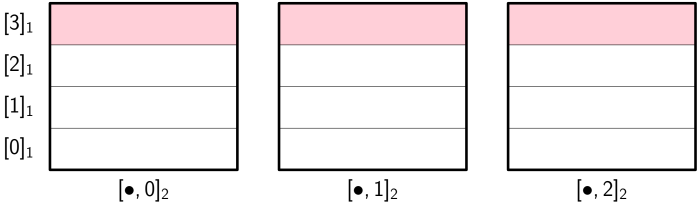


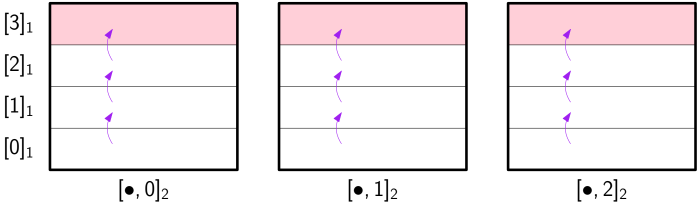

$q_0 = 4$
$\mathcal{R}_1$
$[3]_1$
$[2]_1$
$[1]_1$
$[0]_1$
S
S
S
q_0

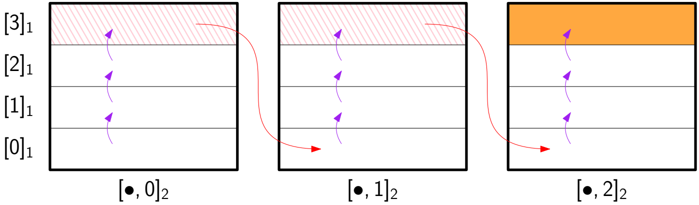
$q_0 = 4$

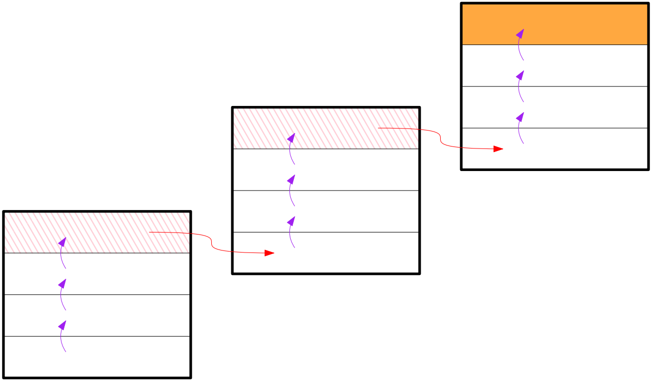


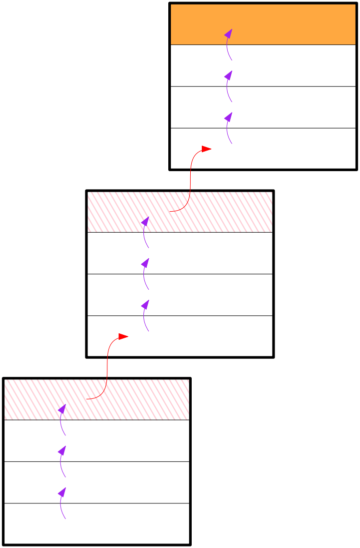

$q_0 = 4$
$[3]_1$
$[2]_1$
$[1]_1$
$[0]_1$
$[\bullet, 0]_2$
$[\bullet, 1]_2$
$[\bullet, 2]_2$
$q_1 = 3$

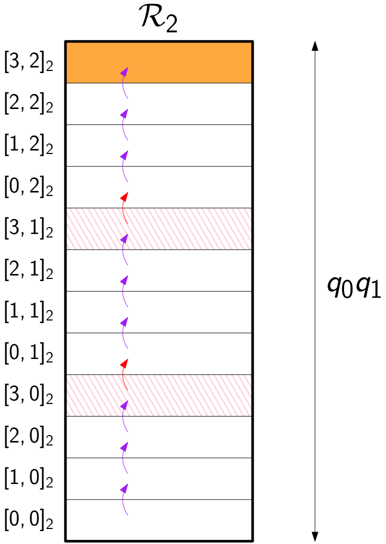

$[3]_1$
$[2]_1$
$[1]_1$
$[0]_1$
$[\bullet, 0]_2$
$[\bullet, 1]_2$
$[\bullet, 2]_2$

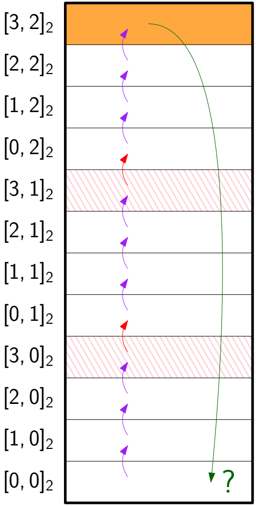

$[3]_1$
$[2]_1$
$[1]_1$
$[0]_1$
$[\bullet, 0]_2$
$[\bullet, 1]_2$
$[\bullet, 2]_2$

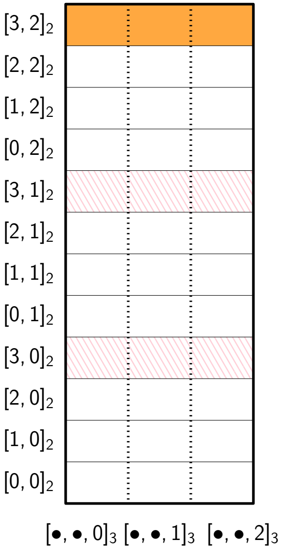

$[3]_1$
$[2]_1$
$[1]_1$
$[0]_1$
$[\bullet, 0]_2$
$[\bullet, 1]_2$
$[\bullet, 2]_2$



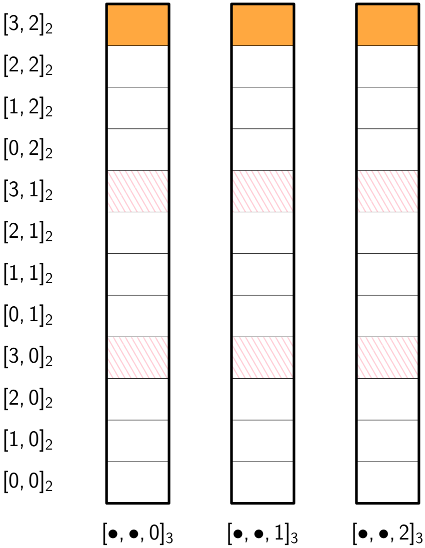


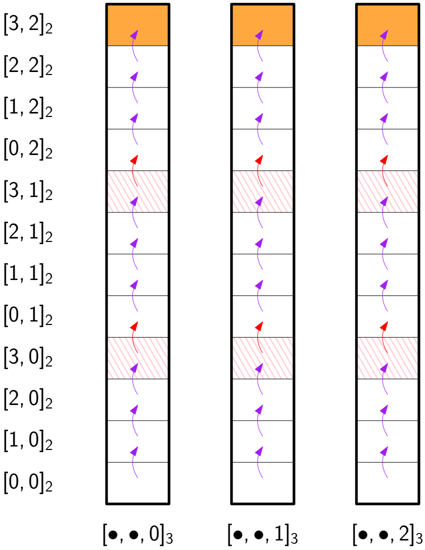

$\mathcal{R}_2$
$[3,2]_2$
$[2,2]_2$
$[1,2]_2$
$[0,2]_2$
$[3,1]_2$
$[2,1]_2$
$[1,1]_2$
$[0,1]_2$
$[3,0]_2$
$[2,0]_2$
$[1,0]_2$
$[0,0]_2$
q_0q_1

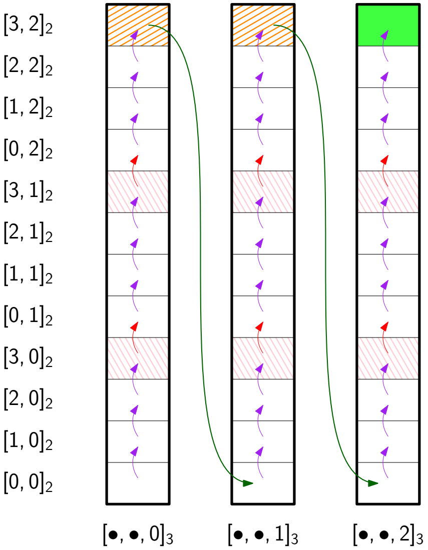

$[3, 2]_2$
$[2, 2]_2$
$[1, 2]_2$
$[0, 2]_2$
$[3, 1]_2$
$[2, 1]_2$
$[1, 1]_2$
$[0, 1]_2$
$[3, 0]_2$
$[2, 0]_2$
$[1, 0]_2$
$[0, 0]_2$
?


$[3, 2]_2$
$[2, 2]_2$
$[1, 2]_2$
$[0, 2]_2$
$[3, 1]_2$
$[2, 1]_2$
$[1, 1]_2$
$[0, 1]_2$
$[3, 0]_2$
$[2, 0]_2$
$[1, 0]_2$
$[0, 0]_2$
$[\bullet, \bullet, 0]_3$ $[\bullet, \bullet, 1]_3$ $[\bullet, \bullet, 2]_3$

$q_2 = 3$


$[3,2]_2$
$[2,2]_2$
$[1,2]_2$
$[0,2]_2$
$[3,1]_2$
$[2,1]_2$
$[1,1]_2$
$[0,1]_2$
$[3,0]_2$
$[2,0]_2$
$[1,0]_2$
$[0,0]_2$
$[\bullet,\bullet,0]_3$
$[\bullet,\bullet,1]_3$
$[\bullet,\bullet,2]_3$


$[3,2]_2$
$[2,2]_2$
$[1,2]_2$
$[0,2]_2$
$[3,1]_2$
$[2,1]_2$
$[1,1]_2$
$[0,1]_2$
$[3,0]_2$
$[2,0]_2$
$[1,0]_2$
$[0,0]_2$
$[\bullet,\bullet,0]_3$
$[\bullet,\bullet,1]_3$
$[\bullet,\bullet,2]_3$

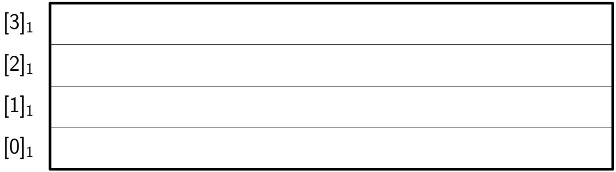

[3, 2]_2
[2, 2]_2
[1, 2]_2
[0, 2]_2
[3, 1]_2
[2, 1]_2
[1, 1]_2
[0, 1]_2
[3, 0]_2
[2, 0]_2
[1, 0]_2
[0, 0]_2
[•, •, 0]_3
[•, •, 1]_3
[•, •, 2]_3

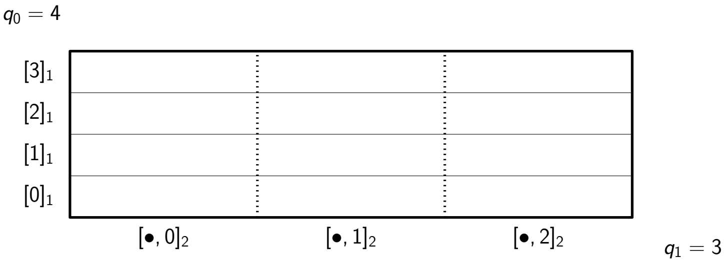
Odomètre :

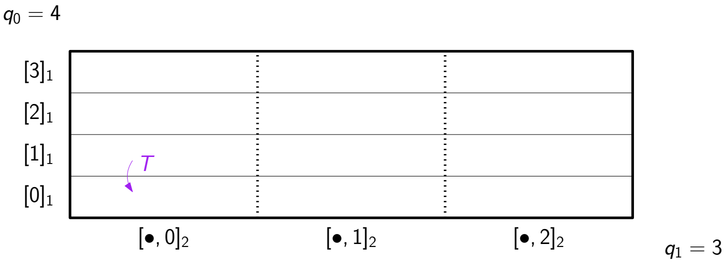
$$\begin{tikzcd}
& {[1]_1} \arrow[r, bend left, "S"] & {[2]_1} \arrow[dr, bend left, dash] & \\
{[0]_1} \arrow[ur, bend left, "S"] & & & \vdots \arrow[dl, bend left, "S"] \\
& {[q_0 - 1]_1} \arrow[ul, bend left, "S"] & {[q_0 - 2]_1} \arrow[l, bend left, "S"] &
\end{tikzcd}$$

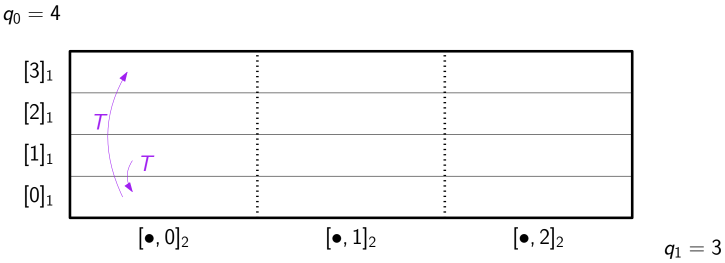
Avec un odomutant : dynamique moins « prévisible »

$q_0 = 4$

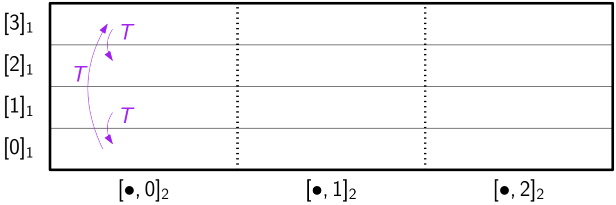



$q_0 = 4$
$[3]_1$
$[2]_1$
$[1]_1$
$[0]_1$
$[\bullet, 0]_2$
$[\bullet, 1]_2$
$[\bullet, 2]_2$
$q_1 = 3$


$q_0 = 4$
$[3]_1$
$[2]_1$
$[1]_1$
$[0]_1$
T
$[\bullet, 0]_2$
$[\bullet, 1]_2$
$[\bullet, 2]_2$
$q_1 = 3$

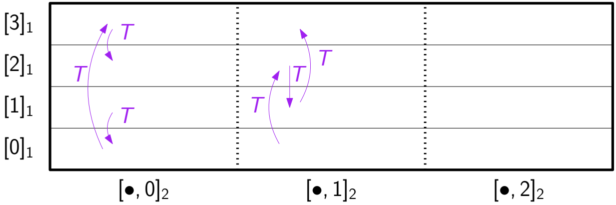

$q_0 = 4$
$[3]_1$
$[2]_1$
$[1]_1$
$[0]_1$
T
T
$[\bullet, 0]_2$
$[\bullet, 1]_2$
$[\bullet, 2]_2$
$q_1 = 3$

$q_0 = 4$

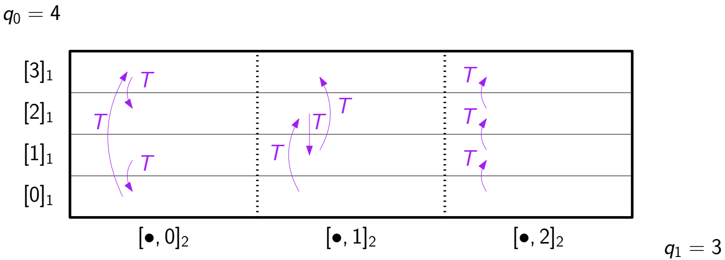


$q_1 = 3$

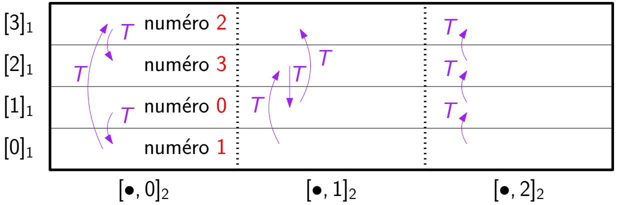
$q_0 = 4$



$q_1 = 3$


$q_0 = 4$
$[3]_1$
$[2]_1$
$[1]_1$
$[0]_1$
T
T
T
T
T
T
T
T
T
$[\bullet, 0]_2$
$[\bullet, 1]_2$
$[\bullet, 2]_2$
$q_1 = 3$

$q_0 = 4$

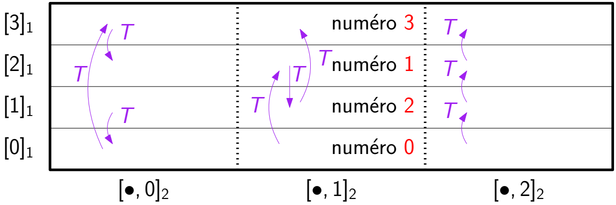


$q_1 = 3$

Permutations :

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto 1 \\ 1 &\mapsto 0 \\ 2 &\mapsto 3 \\ 3 &\mapsto 2 \end{aligned}$$

$q_0 = 4$

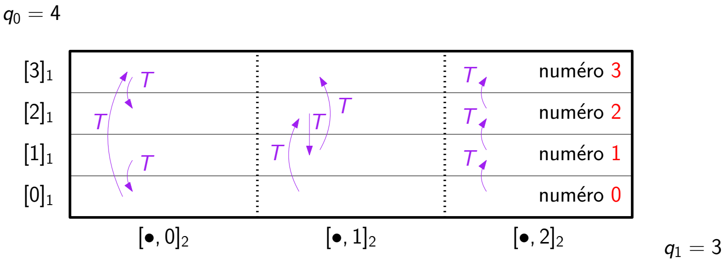


$q_1 = 3$

Permutations :

$0 \mapsto 1$
$1 \mapsto 0$
$2 \mapsto 3$
$3 \mapsto 2$

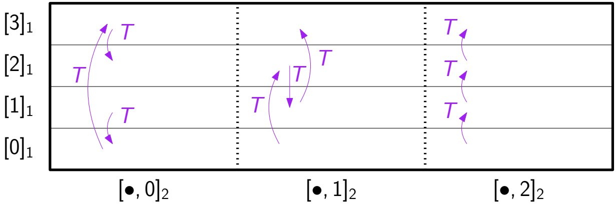
$0 \mapsto 0$
$1 \mapsto 2$
$2 \mapsto 1$
$3 \mapsto 3$



Permutations : $\begin{array}{c} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{c} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{c} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{array}$

$$\sigma_{x_1}^{(0)} \;\to\; \text{étape } 0, \qquad \sigma_{x_1}^{(0)} \;\to\; \text{sous-colonne } [\bullet, x_1]_2$$

$q_0 = 4$

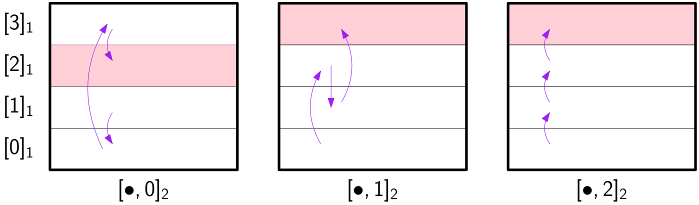


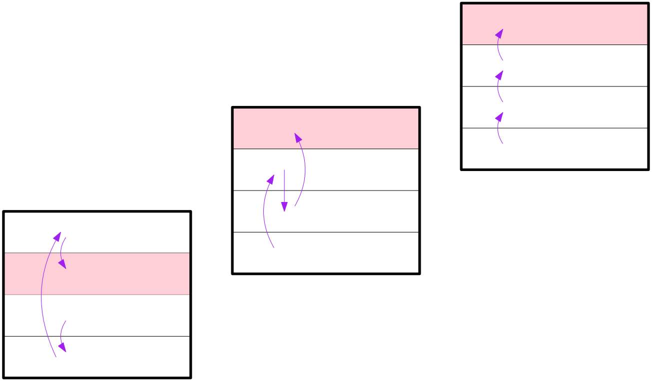
$q_1 = 3$

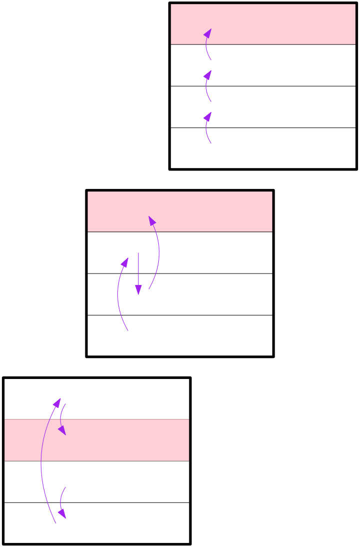
Permutations : $\sigma_0^{(0)}$: $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 0$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 2$

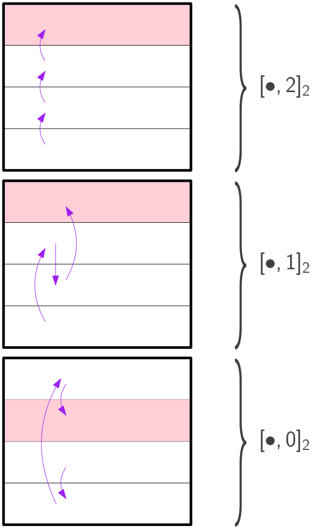
$\sigma_1^{(0)}$: $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 3$

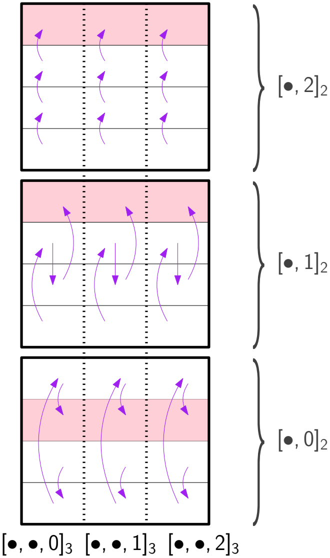
$\sigma_2^{(0)}$: $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$, $3 \mapsto 3$

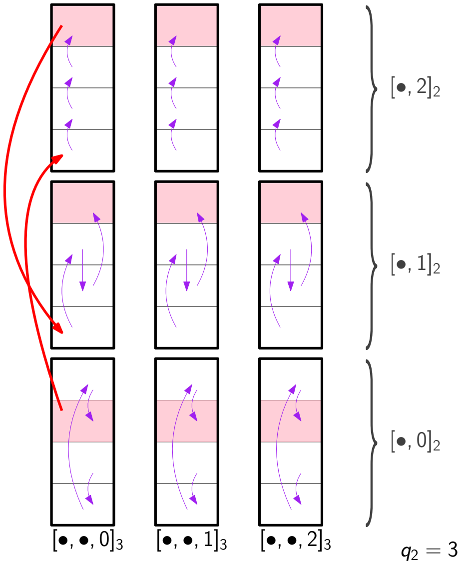

$[3]_1$
$[2]_1$
$[1]_1$
$[0]_1$
$[\bullet, 0]_2$
$[\bullet, 1]_2$
$[\bullet, 2]_2$

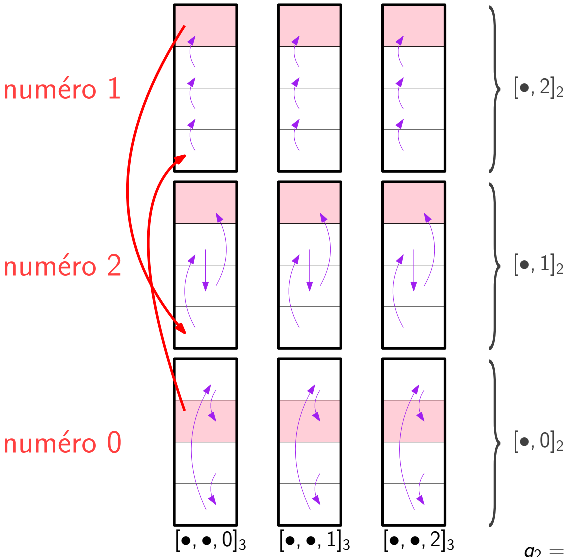





$[\bullet, 2]_2$
$[\bullet, 1]_2$
$[\bullet, 0]_2$


$[\bullet, 2]_2$
$[\bullet, 1]_2$
$[\bullet, 0]_2$
$[\bullet, \bullet, 0]_3$ $[\bullet, \bullet, 1]_3$ $[\bullet, \bullet, 2]_3$

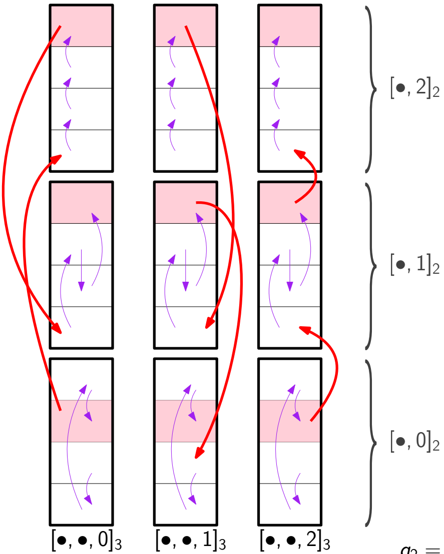

$[\bullet, 2]_2$
$[\bullet, 1]_2$
$[\bullet, 0]_2$
$[\bullet, \bullet, 0]_3$
$[\bullet, \bullet, 1]_3$
$[\bullet, \bullet, 2]_3$
$q_2 = 3$



$q_2 = 3$

Permutations :

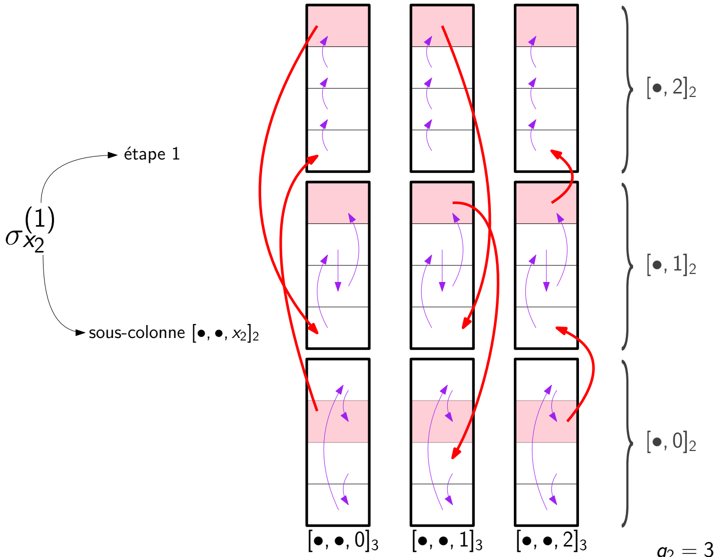
$0 \mapsto 0$
$1 \mapsto 2$
$2 \mapsto 1$



$q_2 = 3$

Permutations :

$[\bullet,\bullet,0]_3$	$[\bullet,\bullet,1]_3$	$[\bullet,\bullet,2]_3$
$0 \mapsto 0$	$0 \mapsto 2$	$0 \mapsto 0$
$1 \mapsto 2$	$1 \mapsto 1$	$1 \mapsto 1$
$2 \mapsto 1$	$2 \mapsto 0$	$2 \mapsto 2$



Permutations :

$\sigma_0^{(1)}: \begin{array}{l} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \end{array}$ $\quad \sigma_1^{(1)}: \begin{array}{l} 0 \mapsto 2 \\ 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 0 \end{array}$ $\quad \sigma_2^{(1)}: \begin{array}{l} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \end{array}$

Un odomutant T, c'est...

- la donnée d'**entiers** $\boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_2} \ldots \geq 2$
  et de l'odomètre S sur $X = \prod_{n \geq 0} \{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$;

Un odomutant T, c'est...

- la donnée d'**entiers** $\boldsymbol{q_0, q_1, q_2} \ldots \geq 2$
  et de l'odomètre S sur $X = \prod_{n \geq 0} \{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$;
- pour tout $n \geq 0$, la donnée de q_{n+1} **permutations** de $\{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$:
  $\boldsymbol{\sigma_0^{(n)}, \sigma_1^{(n)}, \ldots, \sigma_{q_{n+1}-1}^{(n)}}$.

Un odomutant T, c'est...

- la donnée d'**entiers** $\boldsymbol{q_0, q_1, q_2} \ldots \geq 2$
  et de l'odomètre S sur $X = \prod_{n\geq 0} \{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$;
- pour tout $n \geq 0$, la donnée de q_{n+1} **permutations** de $\{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$:
  $\boldsymbol{\sigma_0^{(n)}, \sigma_1^{(n)}, \ldots, \sigma_{q_{n+1}-1}^{(n)}}$.

À l'étape n :

x_{n+1} — $(n+1)$-ième coordonnée $\in \{0, \ldots, q_{n+1} - 1\}$
représente le bloc $[\bullet, \ldots, \bullet, \bullet, x_{n+1}]_{n+2}$

$\downarrow$

$\sigma^{(n)}_{x_{n+1}}$ — permutation sur la n-ième coordonnée $\in \{0, \ldots, q_n - 1\}$

Un odomutant T, c'est...

- la donnée d'**entiers** $\boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_2} \ldots \geq 2$
  et de l'odomètre S sur $X = \prod_{n\geq 0} \{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$;
- pour tout $n \geq 0$, la donnée de q_{n+1} **permutations** de $\{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$:
  $\boldsymbol{\sigma_0^{(n)}}, \boldsymbol{\sigma_1^{(n)}}, \ldots, \boldsymbol{\sigma_{q_{n+1}-1}^{(n)}}$.

À l'étape n :

x_{n+1} $\quad$ $(n+1)$-ième coordonnée $\in \{0, \ldots, q_{n+1} - 1\}$
représente le bloc $[\bullet, \ldots, \bullet, \bullet, x_{n+1}]_{n+2}$

$\downarrow$

$\sigma_{x_{n+1}}^{(n)}$ $\quad$ permutation sur la n-ième coordonnée $\in \{0, \ldots, q_n - 1\}$
$\rightarrow$ permutation des sous-blocs

$$\begin{array}{c} [\bullet, \ldots, \bullet, 0, x_{n+1}]_{n+2}, \\ [\bullet, \ldots, \bullet, 1, x_{n+1}]_{n+2}, \\ \vdots \\ [\bullet, \ldots, \bullet, q_n, x_{n+1}]_{n+2} \end{array}$$

$$
\begin{array}{rccl}
\psi_n\colon & X & \longrightarrow & X \\
& (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & \left(\sigma_{x_1}^{(0)}(x_0),\, \sigma_{x_2}^{(1)}(x_1), \ldots,\, \sigma_{x_{n+1}}^{(n)}(x_n), x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\right)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccl}
\psi\colon & X & \longrightarrow & X \\
& (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & \left(\sigma_{x_1}^{(0)}(x_0),\, \sigma_{x_2}^{(1)}(x_1),\, \sigma_{x_3}^{(2)}(x_2), \ldots\right) = \lim_{n\to+\infty} \psi_n(x)
\end{array}
$$

$$\begin{array}{rccl} \psi_n\colon & X & \longrightarrow & X \\ & (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & \left(\sigma_{x_1}^{(0)}(x_0),\, \sigma_{x_2}^{(1)}(x_1), \ldots,\, \sigma_{x_{n+1}}^{(n)}(x_n), x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \psi\colon & X & \longrightarrow & X \\ & (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & \left(\sigma_{x_1}^{(0)}(x_0),\, \sigma_{x_2}^{(1)}(x_1),\, \sigma_{x_3}^{(2)}(x_2), \ldots\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \psi_n(x) \end{array}$$

Définition (Odomutant T associé à l'odomètre S)

$$T\colon \{x \in X \mid \psi(x) \neq (q_0 - 1, q_1 - 1, \ldots)\} \longrightarrow \{x \in X \mid \psi(x) \neq (0, 0, \ldots)\}$$

$$\boldsymbol{Tx = \lim_{n\to+\infty} \psi_n^{-1} S \psi_n(x)}$$

$$\begin{array}{rccc}\psi_n\colon & X & \longrightarrow & X \\ & (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & \left(\sigma_{x_1}^{(0)}(x_0),\ \sigma_{x_2}^{(1)}(x_1), \ldots,\ \sigma_{x_{n+1}}^{(n)}(x_n), x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\right)\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}\psi\colon & X & \longrightarrow & X \\ & (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & \left(\sigma_{x_1}^{(0)}(x_0),\ \sigma_{x_2}^{(1)}(x_1),\ \sigma_{x_3}^{(2)}(x_2), \ldots\right) = \lim_{n\to+\infty} \psi_n(x)\end{array}$$

Définition (Odomutant T associé à l'odomètre S)

$T\colon \{x \in X \mid \psi(x) \neq (q_0 - 1, q_1 - 1, \ldots)\} \longrightarrow \{x \in X \mid \psi(x) \neq (0, 0, \ldots)\}$

$$\boldsymbol{Tx = \lim_{n\to+\infty} \psi_n^{-1} S \psi_n(x)}$$

- $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$;
- T et S ont les mêmes orbites (à mesure nulle près) ;
- $\psi \circ T = S \circ \psi$ presque partout,
  donc T se factorise sur l'odomètre S.

Rappel :

Théorème (C. 2025+, version plus faible)

Soit S l'odomètre universel. Il existe $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ telle que :

- $\mathrm{h}_\mu(T) > 0$;
- *T et S sont $\log^\beta$-OE pour tout $\beta < 1$.*

Calcul de $\mathrm{h}_\mu(T)$:

Rappel :

Théorème (C. 2025+, version plus faible)

Soit S l'odomètre universel. Il existe $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ telle que :

- $\mathrm{h}_\mu(T) > 0$;
- *T et S sont $\log^\beta$-OE pour tout $\beta < 1$.*

Calcul de $\mathrm{h}_\mu(T)$:

- c'est plus facile de considérer l'entropie topologique
  $\to$ Il faut que $T\colon X \to X$ soit continue sur X

Rappel :

Théorème (C. 2025+, version plus faible)

Soit S l'odomètre universel. Il existe $T \in \mathrm{Aut}(X, \mu)$ telle que :

- $\mathrm{h}_\mu(T) > 0$;
- *T et S sont* $\log^\beta$*-OE pour tout $\beta < 1$.*

Calcul de $\mathrm{h}_\mu(T)$:

- c'est plus facile de considérer l'entropie topologique
  $\to$ Il faut que $T\colon X \to X$ soit continue sur X
- on utilise le principe variationnel
  $\to$ Si T est uniquement ergodique, alors $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T) = \mathrm{h}_\mu(T)$

HYPOTHÈSE 1 :

Pour tout $n \geq 0$, les permutations $\sigma_0^{(n)}, \sigma_1^{(n)}, \ldots, \sigma_{q_{n+1}-1}^{(n)}$ fixent 0 et $q_n - 1$.

Cela donne $T\colon X \setminus \{(q_0 - 1, q_1 - 1, \ldots)\} \to X \setminus \{(0, 0, \ldots)\}$

HYPOTHÈSE 1 :
Pour tout $n \geq 0$, les permutations $\sigma_0^{(n)}, \sigma_1^{(n)}, \ldots, \sigma_{q_{n+1}-1}^{(n)}$ fixent 0 et $q_n - 1$.

Cela donne $T\colon X \setminus \{(q_0 - 1, q_1 - 1, \ldots)\} \to X \setminus \{(0, 0, \ldots)\}$
qu'on prolonge : $T(q_0 - 1, q_1 - 1, \ldots) = (0, 0, \ldots)$

HYPOTHÈSE 1 :
Pour tout $n \geq 0$, les permutations $\sigma_0^{(n)}, \sigma_1^{(n)}, \ldots, \sigma_{q_{n+1}-1}^{(n)}$ fixent 0 et $q_n - 1$.

Cela donne $T\colon X \setminus \{(q_0 - 1, q_1 - 1, \ldots)\} \to X \setminus \{(0, 0, \ldots)\}$
qu'on prolonge : $T(q_0 - 1, q_1 - 1, \ldots) = (0, 0, \ldots)$

Propriété

- *$T\colon X \to X$ est un homéomorphisme (donc T est continue).*
- *Pour tout $x \in X$ (pas seulement à mesure nulle près), $\mathrm{Orb}_T(x) = \mathrm{Orb}_S(x)$ (donc T est uniquement ergodique).*

But :

- trouver les paramètres :
  - les $\boldsymbol{q_n}$ (donc l'odomètre S) ;
  - et les permutations $\boldsymbol{\sigma_i^{(n)}}$ (vérifiant l'hypothèse 1),

tels que $\mathrm{h_{top}}(T) > 0$;

But :

- trouver les paramètres :
    - les $\boldsymbol{q_n}$ (donc l'odomètre S) ;
    - et les permutations $\boldsymbol{\sigma_i^{(n)}}$ (vérifiant l'hypothèse 1),

  tels que $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T) > 0$;
- ...en espérant une équivalence orbitale $\log^{\beta}$-intégrable pour tout $\beta < 1$.

Entropie topologique :

Étant donné $\mathcal{U}$ un recouvrement de X par des ouverts,

- $N(\mathcal{U}) := \min\{|\mathcal{U}'|,\ \mathcal{U}' \text{ sous-recouvrement}\}$

Entropie topologique :

Étant donné $\mathcal{U}$ un recouvrement de X par des ouverts,

- $N(\mathcal{U}) := \min \{|\mathcal{U}'|,\ \mathcal{U}' \text{ sous-recouvrement}\}$
- $\mathcal{U}^n = \{U_0 \cap T^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap T^{-(n-1)}(U_{n-1}) \mid U_0, \ldots, U_{n-1} \in \mathcal{U}\}$

Entropie topologique :

Étant donné $\mathcal{U}$ un recouvrement de X par des ouverts,

- $N(\mathcal{U}) := \min \{|\mathcal{U}'|,\ \mathcal{U}' \text{ sous-recouvrement}\}$
- $\mathcal{U}^n = \{U_0 \cap T^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap T^{-(n-1)}(U_{n-1}) \mid U_0, \ldots, U_{n-1} \in \mathcal{U}\}$

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T, \mathcal{U}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\log N(\mathcal{U}^n)}{n}$$

Entropie topologique :

Étant donné $\mathcal{U}$ un recouvrement de X par des ouverts,

- $N(\mathcal{U}) := \min\{|\mathcal{U}'|,\ \mathcal{U}' \text{ sous-recouvrement}\}$
- $\mathcal{U}^n = \{U_0 \cap T^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap T^{-(n-1)}(U_{n-1}) \mid U_0, \ldots, U_{n-1} \in \mathcal{U}\}$

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T, \mathcal{U}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\log N(\mathcal{U}^n)}{n}$$

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T) = \sup_{\mathcal{U}} \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T, \mathcal{U})$$

Dans $X = \prod_{n\geq 0} \{0, 1, \dots, q_n - 1\} \dots$

Dans $X = \prod_{n \geq 0} \{0, 1, \ldots, q_n - 1\} \ldots$

Rappel

Pour $i \in \{0, 1, \ldots, q_0 - 1\}$, $[i]_1 = \{(x_n)_{n \geq 0} \in X \mid x_0 = i\}$ *(1-cylindre)*

Dans $X = \prod_{n \geq 0} \{0, 1, \ldots, q_n - 1\} \ldots$

Rappel

Pour $i \in \{0, 1, \ldots, q_0 - 1\}$, $[i]_1 = \{(x_n)_{n \geq 0} \in X \mid x_0 = i\}$ *(1-cylindre)*

$\ldots$ considérons $\mathcal{U}_\star = \{[0]_1, [1]_1, \ldots, [q_0 - 1]_1\}$ (recouvrement par des ouverts)

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T) \geq \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T, \mathcal{U}_\star) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\log N((\mathcal{U}_\star)^n)}{n}$$

Dans $X = \prod_{n \geq 0} \{0, 1, \ldots, q_n - 1\} \ldots$

Rappel

Pour $i \in \{0, 1, \ldots, q_0 - 1\}$, $[i]_1 = \{(x_n)_{n \geq 0} \in X \mid x_0 = i\}$ *(1-cylindre)*

$\ldots$ considérons $\mathcal{U}_\star = \{[0]_1, [1]_1, \ldots, [q_0 - 1]_1\}$ (recouvrement par des ouverts)

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T) \geq \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T, \mathcal{U}_\star) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\log N((\mathcal{U}_\star)^n)}{n}$$

Mais $\mathcal{U}_\star$ est aussi une **partition** ! **2 conséquences :**

Dans $X = \prod_{n \geq 0} \{0, 1, \ldots, q_n - 1\} \ldots$

Rappel

Pour $i \in \{0, 1, \ldots, q_0 - 1\}$, $[i]_1 = \{(x_n)_{n \geq 0} \in X \mid x_0 = i\}$ (1-cylindre)

$\ldots$ considérons $\mathcal{U}_\star = \{[0]_1, [1]_1, \ldots, [q_0 - 1]_1\}$ (recouvrement par des ouverts)

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T) \geq \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T, \mathcal{U}_\star) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\log N((\mathcal{U}_\star)^n)}{n}$$

Mais $\mathcal{U}_\star$ est aussi une **partition** ! **2 conséquences :**

1re conséquence :

$$N((\mathcal{U}_\star)^n) = |(\mathcal{U}_\star)^n \setminus \{\emptyset\}|$$

Dans $X = \prod_{n \geq 0} \{0, 1, \ldots, q_n - 1\} \ldots$

Rappel

Pour $i \in \{0, 1, \ldots, q_0 - 1\}$, $[i]_1 = \{(x_n)_{n \geq 0} \in X \mid x_0 = i\}$ (1-cylindre)

$\ldots$ considérons $\mathcal{U}_\star = \{[0]_1, [1]_1, \ldots, [q_0 - 1]_1\}$ (recouvrement par des ouverts)

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T) \geq \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T, \mathcal{U}_\star) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\log N((\mathcal{U}_\star)^n)}{n}$$

Mais $\mathcal{U}_\star$ est aussi une **partition** ! **2 conséquences :**

1re conséquence :

$$N((\mathcal{U}_\star)^n) = |(\mathcal{U}_\star)^n \setminus \{\emptyset\}|$$

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T) \geq \lim_{n \to +\infty} \frac{\log |(\mathcal{U}_\star)^n|}{n}$$

2nde conséquence : codage avec des mots.

2nde conséquence : codage avec des mots.

Rappel

$(\mathcal{U}_\star)^n$ est l'ensemble des

$$[i_0]_1 \cap T^{-1}([i_1]_1) \cap \ldots \cap T^{-(n-1)}([i_{n-1}]_1)$$

pour $i_0, \ldots, i_{n-1} \in \{0, 1, \ldots, q_0 - 1\}$.

2nde conséquence : codage avec des mots.

Rappel

$(\mathcal{U}_\star)^n$ est l'ensemble des

$$[i_0]_1 \cap T^{-1}([i_1]_1) \cap \ldots \cap T^{-(n-1)}([i_{n-1}]_1)$$

pour $i_0, \ldots, i_{n-1} \in \{0, 1, \ldots, q_0 - 1\}$.

Or, étant donné $x \in X$,

$$\begin{aligned} & x \in [i_0]_1 \cap T^{-1}([i_1]_1) \cap \ldots \cap T^{-(n-1)}([i_{n-1}]_1) \\ \Longleftrightarrow\ & x \in [i_0]_1,\ \ Tx \in [i_1]_1,\ \ \ldots,\ \ T^{n-1}x = [i_{n-1}]_1 \end{aligned}$$

2nde conséquence : codage avec des mots.

Rappel

$(\mathcal{U}_\star)^n$ est l'ensemble des

$$[i_0]_1 \cap T^{-1}([i_1]_1) \cap \ldots \cap T^{-(n-1)}([i_{n-1}]_1)$$

pour $i_0, \ldots, i_{n-1} \in \{0, 1, \ldots, q_0 - 1\}$.

Or, étant donné $x \in X$,

$$\begin{aligned} & x \in [i_0]_1 \cap T^{-1}([i_1]_1) \cap \ldots \cap T^{-(n-1)}([i_{n-1}]_1) \\ \iff & x \in [i_0]_1,\ \ Tx \in [i_1]_1,\ \ \ldots,\ \ T^{n-1}x = [i_{n-1}]_1 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ on associe à x le mot $(i_0, \ldots, i_{n-1})$

2nde conséquence : codage avec des mots.

Rappel

$(\mathcal{U}_\star)^n$ est l'ensemble des

$$[i_0]_1 \cap T^{-1}([i_1]_1) \cap \ldots \cap T^{-(n-1)}([i_{n-1}]_1)$$

pour $i_0, \ldots, i_{n-1} \in \{0, 1, \ldots, q_0 - 1\}$.

Or, étant donné $x \in X$,

$$\begin{aligned} & x \in [i_0]_1 \cap T^{-1}([i_1]_1) \cap \ldots \cap T^{-(n-1)}([i_{n-1}]_1) \\ \iff & x \in [i_0]_1,\ \ Tx \in [i_1]_1,\ \ \ldots,\ \ T^{n-1}x = [i_{n-1}]_1 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ on associe à x le mot $(i_0, \ldots, i_{n-1})$

$$\mathrm{h_{top}}(T) \geq \lim_{n \to +\infty} \frac{\log\left(\text{nombre de mots } (i_0,\ldots,i_{n-1}) \text{ de longueur } n \text{ obtenus avec les 1-cylindres}\right)}{n}$$

Rappel sur l'hypothèse 1 :
Pour tout $n \geq 0$, les permutations $\sigma_0^{(n)}, \ldots, \sigma_{q_{n+1}-1}^{(n)}$ fixent 0 et $q_n - 1$.

Rappel sur l'hypothèse 1 :
Pour tout $n \geq 0$, les permutations $\sigma_0^{(n)}, \ldots, \sigma_{q_{n+1}-1}^{(n)}$ fixent 0 et $q_n - 1$.

HYPOTHÈSE 2 :
Pour tout $n \geq 0$, $\sigma_0^{(n)}, \ldots, \sigma_{q_{n+1}-1}^{(n)}$ décrivent toutes les permutations de $\{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$ fixant 0 et $q_n - 1$, et sont deux à deux distinctes.

$\rightsquigarrow q_{n+1} = (q_n - 2)!$

Rappel sur l'hypothèse 1 :
Pour tout $n \geq 0$, les permutations $\sigma_0^{(n)}, \ldots, \sigma_{q_{n+1}-1}^{(n)}$ fixent 0 et $q_n - 1$.

HYPOTHÈSE 2 :
Pour tout $n \geq 0$, $\sigma_0^{(n)}, \ldots, \sigma_{q_{n+1}-1}^{(n)}$ décrivent toutes les permutations de $\{0, 1, \ldots, q_n - 1\}$ fixant 0 et $q_n - 1$, et sont deux à deux distinctes.

$\rightsquigarrow q_{n+1} = (q_n - 2)!$

Proposition

Avec les hypothèses 1 et 2 :

- $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T) \geq (\log q_0) - C$ *où* C *est une constante ;*
- *Si* q_0 *est assez grand,* $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T) > 0$.

Proposition

Si $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est croissante, alors* $\displaystyle\int_X \varphi(|c_T(x)|)\mathrm{d}\mu(x)$ *et* $\displaystyle\int_X \varphi(|c_S(x)|)\mathrm{d}\mu(x)$ *sont majorées par* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\varphi(q_0 \dots q_{n+1})}{q_0 \dots q_n}$.

Proposition

Si $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est croissante, alors* $\int_X \varphi(|c_T(x)|)\mathrm{d}\mu(x)$ *et* $\int_X \varphi(|c_S(x)|)\mathrm{d}\mu(x)$ *sont majorées par* $\sum_{n\geq 0} \frac{\varphi(q_0 \dots q_{n+1})}{q_0 \dots q_n}$*.*

Corollaire

Avec $q_{n+1} = (q_n - 2)!$*, les cocycles sont* $\log^\beta$*-intégrables pour tout* $\beta < 1$*.*

Fin de la preuve du théorème (version affaiblie).

Version topologique :

Théorème (C. 2025+)

Soit S l'odomètre universel, soit $\alpha > 0$ ou $\alpha = +\infty$. Il existe T un homéomorphisme minimal sur le Cantor tel que :

- $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T) = \alpha$;
- *T et S sont* ***fortement orbitalement équivalents****, avec des cocycles* $\log^{\beta}$*-intégrables pour tout $\beta < 1$.*

Équivalence orbitale forte : chaque cocycle a au plus un point de discontinuité

Version topologique :

Théorème (C. 2025+)

Soit S l'odomètre universel, soit $\alpha > 0$ ou $\alpha = +\infty$. Il existe T un homéomorphisme minimal sur le Cantor tel que :

- $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T) = \alpha$;
- *T et S sont **fortement orbitalement équivalents**, avec des cocycles $\log^\beta$-intégrables pour tout $\beta < 1$.*

Équivalence orbitale forte : chaque cocycle a au plus un point de discontinuité

Généralisation de :

Théorème (Boyle–Handelman 1994)

Soit S l'odomètre dyadique, soit $\alpha > 0$ ou $\alpha = +\infty$. Il existe T un homéomorphisme minimal sur le Cantor tel que :

- $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(T) = \alpha$;
- *T et S sont **fortement orbitalement équivalents**.*

Pistes futures...

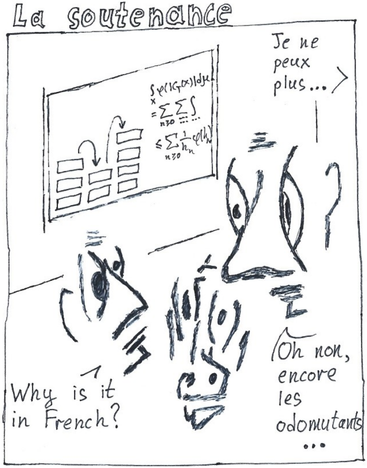
Un résultat très récent :

Théorème (Naryshkin–Petrakos 2025+)

Si S et T sont des odomètres, alors S et T sont φ-OE pour tout $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sous-linéaire.

Généralisation pour les transformations de rang un ? Suspense...

Merci de m'avoir écouté !



(Cartoon by Kostya Krutoy)