

Obstructions à l'équivalence mesurée quantitative entre groupes localement compacts

travail en commun avec Juan Paucar

Corentin Correia
Université Paris Cité

04/06/2026

Notations/conventions :

Γ, Λ : groupes de type fini
(S_Γ, S_Λ ensembles finis générateurs)

Notations/conventions :

Γ, Λ : groupes de type fini
(S_Γ, S_Λ ensembles finis générateurs)

G, H : groupes localement compacts, compactement engendrés
(S_G, S_H ensembles compacts générateurs)

λ_G, λ_H : mesures de Haar

Notations/conventions :

Γ, Λ : groupes de type fini
(S_Γ, S_Λ ensembles finis générateurs)

G, H : groupes localement compacts, compactement engendrés
(S_G, S_H ensembles compacts générateurs)

λ_G, λ_H : mesures de Haar

Étant données $f, g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, on dit que

- g domine f , noté $\mathbf{f} \preceq \mathbf{g}$, si :
 $\exists C > 0, f(x) \leq Cg(Cx)$ pour $x > 0$ assez grand.
- f et g sont asymptotiquement équivalentes, noté $\mathbf{f} \simeq \mathbf{g}$, si :
 $f \preceq g$ et $g \preceq f$

- 1 Équivalence mesurée quantitative
- 2 Généralisation aux groupes localement compacts (travail en commun avec Juan Paucar)
- 3 Idées de preuve

Définition

Un **couplage d'équivalence mesurée** entre deux groupes dénombrables Γ et Λ est la donnée

Définition

Un **couplage d'équivalence mesurée** entre deux groupes dénombrables Γ et Λ est la donnée

- ❶ d'un espace mesuré standard (Ω, μ) ;
 - ❷ d'actions $\Gamma, \Lambda \curvearrowright (\Omega, \mu)$ préservant la mesure μ ,
- tels que

Définition

Un **couplage d'équivalence mesurée** entre deux groupes dénombrables Γ et Λ est la donnée

- ❶ d'un espace mesuré standard (Ω, μ) ;
- ❷ d'actions $\Gamma, \Lambda \curvearrowright (\Omega, \mu)$ préservant la mesure μ ,

tels que

- les actions sont libres et commutent ;
- $\Gamma \curvearrowright (\Omega, \mu)$ admet un domaine fondamental X_Γ de mesure fini ;
- $\Lambda \curvearrowright (\Omega, \mu)$ admet un domaine fondamental X_Λ de mesure fini.

Si cela existe, on dit que Γ et Λ sont **ME**.

Définition

Un **couplage d'équivalence mesurée** entre deux groupes dénombrables Γ et Λ est la donnée

- ❶ d'un espace mesuré standard (Ω, μ) ;
- ❷ d'actions $\Gamma, \Lambda \curvearrowright (\Omega, \mu)$ préservant la mesure μ ,

tels que

- les actions sont libres et commutent ;
- $\Gamma \curvearrowright (\Omega, \mu)$ admet un domaine fondamental X_Γ de mesure fini ;
- $\Lambda \curvearrowright (\Omega, \mu)$ admet un domaine fondamental X_Λ de mesure fini.

Si cela existe, on dit que Γ et Λ sont **ME**.

Exemple

Γ et Λ des réseaux d'un groupe localement compact G :

- $\Omega = G, \mu = \lambda_G$;
- $\Gamma \curvearrowright G$: translation à gauche ;
- $\Lambda \curvearrowright G$: translation à droite.

Autre source d'exemples :

Définition

Un **couplage d'équivalence orbitale** entre deux groupes dénombrables Γ et Λ est la donnée

Autre source d'exemples :

Définition

Un **couplage d'équivalence orbitale** entre deux groupes dénombrables Γ et Λ est la donnée

- ❶ d'un espace de probabilité standard (X, μ) ;
 - ❷ d'actions $\Gamma, \Lambda \curvearrowright (X, \mu)$ préservant la mesure de probabilité μ ,
- tels que

Autre source d'exemples :

Définition

Un **couplage d'équivalence orbitale** entre deux groupes dénombrables Γ et Λ est la donnée

- ❶ d'un espace de probabilité standard (X, μ) ;
 - ❷ d'actions $\Gamma, \Lambda \curvearrowright (X, \mu)$ préservant la mesure de probabilité μ ,
- tels que
- les actions sont libres ;
 - et partagent les mêmes orbites : pour presque tout $x \in X$, $\Gamma \cdot x = \Lambda \cdot x$.

Si cela existe, on dit que Γ et Λ sont **OE**.

C'est équivalent à l'existence d'un couplage d'équivalence mesurée avec des domaines fondamentaux égaux (et dans ce cas $X_\Gamma = X_\Lambda = X$).

OE $\Rightarrow$ ME

Théorème (ORNSTEIN – WEISS 1980)

Les groupes moyennables infinis sont deux à deux OE (et donc ME).

Théorème (ORNSTEIN – WEISS 1980)

Les groupes moyennables infinis sont deux à deux OE (et donc ME).

Comment renforcer l'équivalence orbitale/mesurée pour obtenir une théorie intéressante parmi les groupes moyennables ?

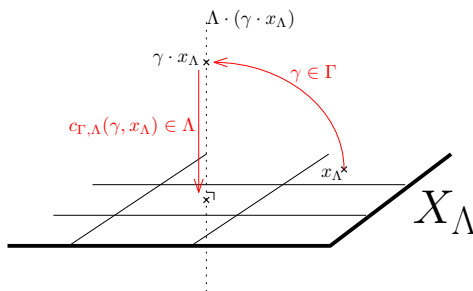
→ contraintes sur les **cocycles** associés à un couplage d'équivalence orbitale/mesurée.

- **Cocycles** associés à un couplage de ME :

$c_{\Gamma, \Lambda}: \Gamma \times X_{\Lambda} \rightarrow \Lambda$ et $c_{\Lambda, \Gamma}: \Lambda \times X_{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ définis par :

- **Cocycles** associés à un couplage de ME :

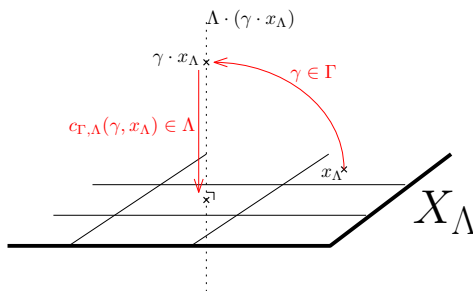
$c_{\Gamma, \Lambda} : \Gamma \times X_{\Lambda} \rightarrow \Lambda$ et $c_{\Lambda, \Gamma} : \Lambda \times X_{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ définis par :



$$c_{\Gamma, \Lambda}(\gamma, x_{\Lambda}) \cdot \gamma \cdot \underbrace{x_{\Lambda}}_{\in X_{\Lambda}} \in X_{\Lambda} \text{ et } c_{\Lambda, \Gamma}(\lambda, x_{\Gamma}) \cdot \lambda \cdot \underbrace{x_{\Gamma}}_{\in X_{\Gamma}} \in X_{\Gamma}.$$

- **Cocycles** associés à un couplage de ME :

$c_{\Gamma, \Lambda} : \Gamma \times X_{\Lambda} \rightarrow \Lambda$ et $c_{\Lambda, \Gamma} : \Lambda \times X_{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ définis par :



$$c_{\Gamma, \Lambda}(\gamma, x_{\Lambda}) \cdot \underbrace{\gamma \cdot x_{\Lambda}}_{\in X_{\Lambda}} \in X_{\Lambda} \text{ et } c_{\Lambda, \Gamma}(\lambda, x_{\Gamma}) \cdot \underbrace{\lambda \cdot x_{\Gamma}}_{\in X_{\Gamma}} \in X_{\Gamma}.$$

Actions induites $\Gamma \curvearrowright (X_{\Lambda}, \mu_{X_{\Lambda}})$ et $\Lambda \curvearrowright (X_{\Gamma}, \mu_{X_{\Gamma}})$:

$$\gamma \bullet x_{\Lambda} := c_{\Gamma, \Lambda}(\gamma, x_{\Lambda}) \cdot \gamma \cdot x_{\Lambda} \text{ et } \lambda \bullet x_{\Gamma} := c_{\Lambda, \Gamma}(\lambda, x_{\Gamma}) \cdot \lambda \cdot x_{\Gamma}.$$

- **Cocycles** associés à un couplage d'OE :

$c_{\Gamma, \Lambda} : \Gamma \times X \rightarrow \Lambda$ et $c_{\Lambda, \Gamma} : \Lambda \times X \rightarrow \Gamma$ définis de la manière suivante :

$$\Gamma \cdot x = \Lambda \cdot x$$

- **Cocycles** associés à un couplage d'OE :

$c_{\Gamma, \Lambda}: \Gamma \times \mathbf{X} \rightarrow \Lambda$ et $c_{\Lambda, \Gamma}: \Lambda \times \mathbf{X} \rightarrow \Gamma$ définis de la manière suivante :

$$\begin{array}{c} \Gamma \cdot x = \Lambda \cdot x \\ \swarrow \quad \searrow \\ \gamma \cdot x \in \Lambda \cdot x = \{\lambda \cdot x \mid \lambda \in \Lambda\} \\ \gamma \cdot x = \underbrace{c_{\Gamma, \Lambda}(\gamma, x)}_{\in \Lambda} \cdot x \end{array}$$

- **Cocycles** associés à un couplage d'OE :

$c_{\Gamma, \Lambda} : \Gamma \times \mathbf{X} \rightarrow \Lambda$ et $c_{\Lambda, \Gamma} : \Lambda \times \mathbf{X} \rightarrow \Gamma$ définis de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 & \Gamma \cdot x = \Lambda \cdot x & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \gamma \cdot x \in \Lambda \cdot x = \{\lambda \cdot x \mid \lambda \in \Lambda\} & & \lambda \cdot x \in \Gamma \cdot x = \{\gamma \cdot x \mid \gamma \in \Gamma\} \\
 \gamma \cdot x = \underbrace{c_{\Gamma, \Lambda}(\gamma, x)}_{\in \Lambda} \cdot x & & \lambda \cdot x = \underbrace{c_{\Lambda, \Gamma}(\lambda, x)}_{\in \Gamma} \cdot x
 \end{array}$$

- Lorsqu'on démontre « OE $\iff$ ME avec $X_\Gamma = X_\Lambda$ » :
 - les actions induites $\Gamma \curvearrowright (X_\Lambda, \mu_{X_\Lambda})$ et $\Lambda \curvearrowright (X_\Gamma, \mu_{X_\Gamma})$ ont les mêmes orbites ;

- Lorsqu'on démontre « OE $\iff$ ME avec $X_\Gamma = X_\Lambda$ » :
 - les actions induites $\Gamma \curvearrowright (X_\Lambda, \mu_{X_\Lambda})$ et $\Lambda \curvearrowright (X_\Gamma, \mu_{X_\Gamma})$ ont les mêmes orbites ;
 - les cocycles d'OE et de ME sont les mêmes fonctions à peu de choses près (on ne perd pas d'information).

- Lorsqu'on démontre « OE $\iff$ ME avec $X_\Gamma = X_\Lambda$ » :
 - les actions induites $\Gamma \curvearrowright (X_\Lambda, \mu_{X_\Lambda})$ et $\Lambda \curvearrowright (X_\Gamma, \mu_{X_\Gamma})$ ont les mêmes orbites;
 - les cocycles d'OE et de ME sont les mêmes fonctions à peu de choses près (on ne perd pas d'information).
- Pour une OE, $c_{\Gamma, \Lambda}(\cdot, x): \Gamma \rightarrow \Lambda$ et $c_{\Lambda, \Gamma}(\cdot, x): \Lambda \rightarrow \Gamma$ sont des **bijections** pour presque tout $x \in X$ (inverses l'une de l'autre).

- Lorsqu'on démontre « OE $\iff$ ME avec $X_\Gamma = X_\Lambda$ » :
 - les actions induites $\Gamma \curvearrowright (X_\Lambda, \mu_{X_\Lambda})$ et $\Lambda \curvearrowright (X_\Gamma, \mu_{X_\Gamma})$ ont les mêmes orbites ;
 - les cocycles d'OE et de ME sont les mêmes fonctions à peu de choses près (on ne perd pas d'information).
- Pour une OE, $c_{\Gamma, \Lambda}(\cdot, x) : \Gamma \rightarrow \Lambda$ et $c_{\Lambda, \Gamma}(\cdot, x) : \Lambda \rightarrow \Gamma$ sont des **bijections** pour presque tout $x \in X$ (inverses l'une de l'autre).
- Pour une ME, c'est valable pour $x \in X_\Gamma \cap X_\Lambda$, mais ce sont des **bijections entre $R_\Gamma(x)$ et $R_\Lambda(x)$** , où

$$R_\Gamma(x) := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \bullet x \in X_\Gamma \cap X_\Lambda\}.$$

Définition

Soient Γ et Λ deux groupes de type fini.

Soit (Ω, μ) un couplage d'équivalence mesurée entre Γ et Λ .

Soient $\varphi, \psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions croissantes.

On dit que (Ω, μ) est un **couplage de ME (φ, ψ) -intégrable** de Γ vers Λ si

Définition

Soient Γ et Λ deux groupes de type fini.

Soit (Ω, μ) un couplage d'équivalence mesurée entre Γ et Λ .

Soient $\varphi, \psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions croissantes.

On dit que (Ω, μ) est un **couplage de ME (φ, ψ) -intégrable** de Γ vers Λ si

- $\forall \gamma \in S_\Gamma, \exists C_\gamma > 0, \int_{X_\Lambda} \varphi \left(\frac{|c_{\Gamma, \Lambda}(\gamma, x)|_\Lambda}{C_\gamma} \right) d\mu(x) < +\infty;$

Définition

Soient Γ et Λ deux groupes de type fini.

Soit (Ω, μ) un couplage d'équivalence mesurée entre Γ et Λ .

Soient $\varphi, \psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions croissantes.

On dit que (Ω, μ) est un **couplage de ME (φ, ψ) -intégrable** de Γ vers Λ si

- $\forall \gamma \in S_\Gamma, \exists C_\gamma > 0, \int_{X_\Lambda} \varphi \left(\frac{|c_{\Gamma, \Lambda}(\gamma, x)|_\Lambda}{C_\gamma} \right) d\mu(x) < +\infty;$
- $\forall \lambda \in S_\Lambda, \exists C'_\lambda > 0, \int_{X_\Gamma} \psi \left(\frac{|c_{\Lambda, \Gamma}(\lambda, x)|_\Gamma}{C'_\lambda} \right) d\mu(x) < +\infty.$

Définition

Soient Γ et Λ deux groupes de type fini.

Soit (Ω, μ) un couplage d'équivalence mesurée entre Γ et Λ .

Soient $\varphi, \psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions croissantes.

On dit que (Ω, μ) est un **couplage de ME (φ, ψ) -intégrable** de Γ vers Λ si

- $\forall \gamma \in S_\Gamma, \exists C_\gamma > 0, \int_{X_\Lambda} \varphi \left(\frac{|c_{\Gamma, \Lambda}(\gamma, x)|_\Lambda}{C_\gamma} \right) d\mu(x) < +\infty;$
- $\forall \lambda \in S_\Lambda, \exists C'_\lambda > 0, \int_{X_\Gamma} \psi \left(\frac{|c_{\Lambda, \Gamma}(\lambda, x)|_\Gamma}{C'_\lambda} \right) d\mu(x) < +\infty.$

Définition

(X, μ) **couplage d'OE (φ, ψ) -intégrable** : remplacer X_Γ et X_Λ par X .

Définition

Soient Γ et Λ deux groupes de type fini.

Soit (Ω, μ) un couplage d'équivalence mesurée entre Γ et Λ .

Soient $\varphi, \psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions croissantes.

On dit que (Ω, μ) est un **couplage de ME (φ, ψ) -intégrable** de Γ vers Λ si

- $\forall \gamma \in S_\Gamma, \exists C_\gamma > 0, \int_{X_\Lambda} \varphi \left(\frac{|c_{\Gamma, \Lambda}(\gamma, x)|_\Lambda}{C_\gamma} \right) d\mu(x) < +\infty;$
- $\forall \lambda \in S_\Lambda, \exists C'_\lambda > 0, \int_{X_\Gamma} \psi \left(\frac{|c_{\Lambda, \Gamma}(\lambda, x)|_\Gamma}{C'_\lambda} \right) d\mu(x) < +\infty.$

Définition

(X, μ) **couplage d'OE (φ, ψ) -intégrable** : remplacer X_Γ et X_Λ par X .

L^p pour $\varphi(x) = x^p$ ($p \geq 0$)

L^0 : hypothèse vide sur le cocycle correspondant.

Exemples : $(\log, L^0)$, $(L^0, L^{1/2})$, ...

Définition

Le **profil isopérimétrique** $j_{1,\Gamma} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de Γ de type fini est défini par :

$$j_{1,\Gamma}(n) := \sup_{\substack{A \subset \Gamma \\ |A| \leq n}} \frac{|A|}{|\partial_\Gamma A|}$$

où $\partial_\Gamma A := (S_\Gamma A) \setminus A$ est la frontière de A .

Définition

Le **profil isopérimétrique** $j_{1,\Gamma} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de Γ de type fini est défini par :

$$j_{1,\Gamma}(n) := \sup_{\substack{A \subset \Gamma \\ |A| \leq n}} \frac{|A|}{|\partial_\Gamma A|}$$

où $\partial_\Gamma A := (S_\Gamma A) \setminus A$ est la frontière de A .

Γ est moyennable si et seulement si $j_{1,\Gamma}$ n'est pas bornée (considérer $A = F_n$ étant donnée $(F_n)_{n \geq 0}$ une suite de Følner)

Définition

Le **profil isopérimétrique** $j_{1,\Gamma} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de Γ de type fini est défini par :

$$j_{1,\Gamma}(n) := \sup_{\substack{A \subset \Gamma \\ |A| \leq n}} \frac{|A|}{|\partial_\Gamma A|}$$

où $\partial_\Gamma A := (S_\Gamma A) \setminus A$ est la frontière de A .

Γ est moyennable si et seulement si $j_{1,\Gamma}$ n'est pas bornée (considérer $A = F_n$ étant donnée $(F_n)_{n \geq 0}$ une suite de Følner)

Exemple

- Γ à croissance polynomial de degré d (ex : $\mathbb{Z}^d$) : $j_{1,\Gamma}(n) \simeq n^{1/d}$;

Définition

Le **profil isopérimétrique** $j_{1,\Gamma} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de Γ de type fini est défini par :

$$j_{1,\Gamma}(n) := \sup_{\substack{A \subset \Gamma \\ |A| \leq n}} \frac{|A|}{|\partial_\Gamma A|}$$

où $\partial_\Gamma A := (S_\Gamma A) \setminus A$ est la frontière de A .

Γ est moyennable si et seulement si $j_{1,\Gamma}$ n'est pas bornée (considérer $A = F_n$ étant donnée $(F_n)_{n \geq 0}$ une suite de Følner)

Exemple

- Γ à croissance polynomial de degré d (ex : $\mathbb{Z}^d$) : $j_{1,\Gamma}(n) \simeq n^{1/d}$;
- $\Gamma = \text{BS}(1, n)$, $n \geq 2$ (groupe de Baumslag-Solitar) : $j_{1,\Gamma}(n) \simeq \log n$;

Définition

Le **profil isopérimétrique** $j_{1,\Gamma} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de Γ de type fini est défini par :

$$j_{1,\Gamma}(n) := \sup_{\substack{A \subset \Gamma \\ |A| \leq n}} \frac{|A|}{|\partial_\Gamma A|}$$

où $\partial_\Gamma A := (S_\Gamma A) \setminus A$ est la frontière de A .

Γ est moyennable si et seulement si $j_{1,\Gamma}$ n'est pas bornée (considérer $A = F_n$ étant donnée $(F_n)_{n \geq 0}$ une suite de Følner)

Exemple

- Γ à croissance polynomial de degré d (ex : $\mathbb{Z}^d$) : $j_{1,\Gamma}(n) \simeq n^{1/d}$;
- $\Gamma = \text{BS}(1, n)$, $n \geq 2$ (groupe de Baumslag-Solitar) : $j_{1,\Gamma}(n) \simeq \log n$;
- [Erschler 2003] $\Gamma = F \wr \mathbb{Z}$, F groupe fini (groupe d'allumeur de réverbère sur $\mathbb{Z}$) : $j_{1,\Gamma}(n) \simeq \log n$;

Définition

Le **profil isopérimétrique** $j_{1,\Gamma} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de Γ de type fini est défini par :

$$j_{1,\Gamma}(n) := \sup_{\substack{A \subset \Gamma \\ |A| \leq n}} \frac{|A|}{|\partial_\Gamma A|}$$

où $\partial_\Gamma A := (S_\Gamma A) \setminus A$ est la frontière de A .

Γ est moyennable si et seulement si $j_{1,\Gamma}$ n'est pas bornée (considérer $A = F_n$ étant donnée $(F_n)_{n \geq 0}$ une suite de Følner)

Exemple

- Γ à croissance polynomial de degré d (ex : $\mathbb{Z}^d$) : $j_{1,\Gamma}(n) \simeq n^{1/d}$;
- $\Gamma = \text{BS}(1, n)$, $n \geq 2$ (groupe de Baumslag-Solitar) : $j_{1,\Gamma}(n) \simeq \log n$;
- [Erschler 2003] $\Gamma = F \wr \mathbb{Z}$, F groupe fini (groupe d'allumeur de réverbère sur $\mathbb{Z}$) : $j_{1,\Gamma}(n) \simeq \log n$;
- [Erschler 2003] $\Gamma = F \wr (F \wr (\dots (F \wr \mathbb{Z}) \dots))$: $j_{1,\Gamma}(n) \simeq \log \log \dots \log n$.

Définition

Le **profil isopérimétrique** $j_{1,\Gamma} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de Γ de type fini est défini par :

$$j_{1,\Gamma}(n) := \sup_{\substack{A \subset \Gamma \\ |A| \leq n}} \frac{|A|}{|\partial_\Gamma A|}$$

où $\partial_\Gamma A := (S_\Gamma A) \setminus A$ est la frontière de A .

Γ est moyennable si et seulement si $j_{1,\Gamma}$ n'est pas bornée (considérer $A = F_n$ étant donnée $(F_n)_{n \geq 0}$ une suite de Følner)

Exemple

- Γ à croissance polynomial de degré d (ex : $\mathbb{Z}^d$) : $j_{1,\Gamma}(n) \simeq n^{1/d}$;
- $\Gamma = \text{BS}(1, n)$, $n \geq 2$ (groupe de Baumslag-Solitar) : $j_{1,\Gamma}(n) \simeq \log n$;
- [Erschler 2003] $\Gamma = F \wr \mathbb{Z}$, F groupe fini (groupe d'allumeur de réverbère sur $\mathbb{Z}$) : $j_{1,\Gamma}(n) \simeq \log n$;
- [Erschler 2003] $\Gamma = F \wr (F \wr (\dots (F \wr \mathbb{Z}) \dots))$: $j_{1,\Gamma}(n) \simeq \log \log \dots \log n$.

« Plus vite le profil isopérimétrique $j_{1,\Gamma}$ croît vers $+\infty$, plus le groupe Γ est moyennable »

Définition

Le **profil isopérimétrique** $j_{1,\Gamma} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de Γ de type fini est défini par :

$$j_{1,\Gamma}(n) := \sup_{\substack{A \subset \Gamma \\ |A| \leq n}} \frac{|A|}{|\partial_\Gamma A|}$$

où $\partial_\Gamma A := (S_\Gamma A) \setminus A$ est la frontière de A .

On a également $j_{1,\Gamma}(n) \simeq \sup_{\substack{f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \\ |\text{supp } f| \leq n}} \frac{\|f\|_1}{\|\nabla f\|_1},$

avec $\|f\|_1 := \sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|$ et $\|\nabla f\|_1 := \sum_{s \in S_\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma) - f(s\gamma)|.$

(On a remplacé A par $f = 1_A$)

Théorème (Delabie – Koivisto – Le Maître – Tessera 2022)

Soient Γ et Λ des groupes de type fini.

Soit $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que $t \mapsto t/\varphi(t)$ est croissante.

Théorème (Delabie – Koivisto – Le Maître – Tessera 2022)

Soient Γ et Λ des groupes de type fini.

Soit $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que $t \mapsto t/\varphi(t)$ est croissante.

S'il existe un couplage de ME (φ, L^0) -intégrable de Γ vers Λ , alors

$$\varphi(j_{1,\Lambda}(x)) \preceq j_{1,\Gamma}(x).$$

Théorème (Delabie – Koivisto – Le Maître – Tessera 2022)

Soient Γ et Λ des groupes de type fini.

Soit $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que $t \mapsto t/\varphi(t)$ est croissante.

S'il existe un couplage de ME (φ, L^0) -intégrable de Γ vers Λ , alors

$$\varphi(j_{1,\Lambda}(x)) \preceq j_{1,\Gamma}(x).$$

Si Λ est « plus gros » que Γ , i.e. $j_{1,\Lambda} \preceq j_{1,\Gamma}$, alors la conclusion n'apporte rien.

Le plus intéressant : lorsque Γ est « plus gros » que Λ .

Exemple d'application :

$$j_{1,\mathbb{Z}^d}(n) \simeq n^{1/d}.$$

$\leadsto$ S'il existe un couplage (φ, L^0) -intégrable de $\mathbb{Z}^{k+\ell}$ vers $\mathbb{Z}^k$, alors

$$\varphi(x) \preceq x^{\frac{k}{k+\ell}}.$$

Exemple d'application :

$$j_{1,\mathbb{Z}^d}(n) \simeq n^{1/d}.$$

$\leadsto$ S'il existe un couplage (φ, L^0) -intégrable de $\mathbb{Z}^{k+\ell}$ vers $\mathbb{Z}^k$, alors

$$\varphi(x) \preceq x^{\frac{k}{k+\ell}}.$$

C'est optimal :

Théorème (Delabie – Koivisto – Le Maître – Tessera 2022)

Pour tout $p < \frac{k}{k+\ell}$, il existe un couplage d'OE (L^p, L^0) de $\mathbb{Z}^{k+\ell}$ vers $\mathbb{Z}^k$.

et $p = \frac{k}{k+\ell}$?

Exemple d'application :

$$j_{1,\mathbb{Z}^d}(n) \simeq n^{1/d}.$$

$\leadsto$ S'il existe un couplage (φ, L^0) -intégrable de $\mathbb{Z}^{k+\ell}$ vers $\mathbb{Z}^k$, alors

$$\varphi(x) \preceq x^{\frac{k}{k+\ell}}.$$

C'est optimal :

Théorème (Delabie – Koivisto – Le Maître – Tessera 2022)

Pour tout $p < \frac{k}{k+\ell}$, il existe un couplage d'OE (L^p, L^0) de $\mathbb{Z}^{k+\ell}$ vers $\mathbb{Z}^k$.

et $p = \frac{k}{k+\ell}$?

Théorème (C. 2025)

Il n'existe pas de couplage $(L^{\frac{k}{k+\ell}}, L^0)$ de $\mathbb{Z}^{k+\ell}$ vers $\mathbb{Z}^k$.

Exemple d'application :

$$j_{1,\mathbb{Z}^d}(n) \simeq n^{1/d}.$$

$\leadsto$ S'il existe un couplage (φ, L^0) -intégrable de $\mathbb{Z}^{k+\ell}$ vers $\mathbb{Z}^k$, alors

$$\varphi(x) \preceq x^{\frac{k}{k+\ell}}.$$

C'est optimal :

Théorème (Delabie – Koivisto – Le Maître – Tessera 2022)

Pour tout $p < \frac{k}{k+\ell}$, il existe un couplage d'OE (L^p, L^0) de $\mathbb{Z}^{k+\ell}$ vers $\mathbb{Z}^k$.

et $p = \frac{k}{k+\ell}$?

Théorème (C. 2025)

Il n'existe pas de couplage $(L^{\frac{k}{k+\ell}}, L^0)$ de $\mathbb{Z}^{k+\ell}$ vers $\mathbb{Z}^k$.

Corollaire (Delabie – Koivisto – Le Maître – Tessera 2022, C. 2025)

Il existe un couplage (L^p, L^0) de $\mathbb{Z}^{k+\ell}$ vers $\mathbb{Z}^k$ si et seulement si $p < \frac{k}{k+\ell}$.

- 1 Équivalence mesurée quantitative
- 2 Généralisation aux groupes localement compacts (travail en commun avec Juan Paucar)
- 3 Idées de preuve

Comment généralise-t-on les définitions de :

- OE/ME ;
- (φ, ψ) -intégrabilité ;

pour les groupes localement compacts ?

Entre groupes G et H localement compacts :

- Définition de l'OE : même définition que pour les groupes discrets ✓
- Définition de la ME :

Remarque

Dans le cas discret, les choses suivantes se passent

- la mesure μ de Ω induit une mesure finie non nulle sur X_Γ et sur X_Λ ;
- identification $(\Omega, \mu) \simeq (\Gamma \times X_\Gamma, \lambda_\Gamma \otimes \mu|_{X_\Gamma})$ et $(\Omega, \mu) \simeq (\Lambda \times X_\Lambda, \lambda_\Lambda \otimes \mu|_{X_\Lambda})$.

Entre groupes G et H localement compacts :

- **Définition de l'OE** : même définition que pour les groupes discrets ✓
- **Définition de la ME** :

Remarque

Dans le cas discret, les choses suivantes se passent

- la mesure μ de Ω induit une mesure finie non nulle sur X_Γ et sur X_Λ ;
- identification $(\Omega, \mu) \simeq (\Gamma \times X_\Gamma, \lambda_\Gamma \otimes \mu|_{X_\Gamma})$ et $(\Omega, \mu) \simeq (\Lambda \times X_\Lambda, \lambda_\Lambda \otimes \mu|_{X_\Lambda})$.

Problème dans le cas non-discret : avec la même définition que pour les groupes discrets, l'identification n'a pas forcément lieu et les domaines fondamentaux peuvent être de μ -mesure nulle.

Entre groupes G et H localement compacts :

- **Définition de l'OE** : même définition que pour les groupes discrets ✓
- **Définition de la ME** :

Remarque

Dans le cas discret, les choses suivantes se passent

- la mesure μ de Ω induit une mesure finie non nulle sur X_Γ et sur X_Λ ;
- identification $(\Omega, \mu) \simeq (\Gamma \times X_\Gamma, \lambda_\Gamma \otimes \mu|_{X_\Gamma})$ et $(\Omega, \mu) \simeq (\Lambda \times X_\Lambda, \lambda_\Lambda \otimes \mu|_{X_\Lambda})$.

Problème dans le cas non-discret : avec la même définition que pour les groupes discrets, l'identification n'a pas forcément lieu et les domaines fondamentaux peuvent être de μ -mesure nulle.

Solution : il faut supposer dans la définition que (Ω, μ) s'identifie à $(G \times X_G, \lambda_G \otimes \nu_{X_G})$ et à $(H \times X_H, \lambda_H \otimes \nu_{X_H})$, où (X_G, ν_{X_G}) et (X_H, ν_{X_H}) sont des espaces mesurés de mesure finie.

Conditions d'intégrabilité pour les cocycles :

On se restreint aux fonctions $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall C > 0, \varphi(Cx) = O(\varphi(x)).$$

Exemples :

- φ sous-additive ;
- φ croissante telle que $t \mapsto \frac{t}{\varphi(t)}$ est croissante.

Conditions d'intégrabilité pour les cocycles :

On se restreint aux fonctions $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall C > 0, \varphi(Cx) = O(\varphi(x)).$$

Exemples :

- φ sous-additive ;
- φ croissante telle que $t \mapsto \frac{t}{\varphi(t)}$ est croissante.

φ -intégrabilité du cocycle :

$$\sup_{g \in S_G} \int_{X_\Lambda} \varphi(|c_{G,H}(g, x)|_H) d\nu_{X_\Lambda}(x) < +\infty.$$

Théorème (C. – Paucar 2026+)

Soient G et H des groupes localement compacts, unimodulaires, compactement engendrés.

Théorème (C. – Paucar 2026+)

Soient G et H des groupes localement compacts, unimodulaires, compactement engendrés. Soit $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que $t \mapsto t/\varphi(t)$ est croissante.

S'il existe un couplage de ME (φ, L^0) -intégrable de G vers H , alors

$$\varphi(j_{1,H}(x)) \preccurlyeq j_{1,G}(x).$$

Exemple d'application :

Théorème (C. – Paucar 2026+)

Soient G et H des groupes localement compacts, unimodulaires, compactement engendrés. Soit $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que $t \mapsto t/\varphi(t)$ est croissante.

S'il existe un couplage de ME (φ, L^0) -intégrable de G vers H , alors

$$\varphi(j_{1,H}(x)) \preccurlyeq j_{1,G}(x).$$

Exemple d'application :

Théorème (Delabie – Llosa Isenrich – Tessera 2026+)

Soient G et H deux groupes de Lie nilpotents simplement connexes, de degré de croissance m et n respectivement, avec $m > n$.

Alors pour tout $p < \frac{n}{m}$, il existe un couplage d'OE (L^p, L^0) de G vers H .

Théorème (C. – Paucar 2026+)

Soient G et H des groupes localement compacts, unimodulaires, compactement engendrés. Soit $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que $t \mapsto t/\varphi(t)$ est croissante.

S'il existe un couplage de ME (φ, L^0) -intégrable de G vers H , alors

$$\varphi(j_{1,H}(x)) \preccurlyeq j_{1,G}(x).$$

Exemple d'application :

Théorème (Delabie – Llosa Isenrich – Tessera 2026+)

Soient G et H deux groupes de Lie nilpotents simplement connexes, de degré de croissance m et n respectivement, avec $m > n$.

Alors pour tout $p < \frac{n}{m}$, il existe un couplage d'OE (L^p, L^0) de G vers H .

Corollaire (Delabie – Llosa Isenrich – Tessera, C. – Paucar 2026+)

G et H comme précédemment.

Alors il existe un couplage d'OE (L^p, L^0) de G vers H si et seulement si $p < \frac{n}{m}$.

- 1 Équivalence mesurée quantitative
- 2 Généralisation aux groupes localement compacts (travail en commun avec Juan Paucar)
- 3 Idées de preuve

Tout d'abord, idées de preuve dans le cas de l'**OE** entre groupes **discrets**.

Rappel

$$j_{1,\Gamma}(n) \simeq \sup_{\substack{f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \\ |\text{supp } f| \leq n}} \frac{\|f\|_1}{\|\nabla f\|_1}$$

Tout d'abord, idées de preuve dans le cas de l'**OE** entre groupes **discrets**.

Rappel

$$j_{1,\Gamma}(n) \simeq \sup_{\substack{f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \\ |\text{supp } f| \leq n}} \frac{\|f\|_1}{\|\nabla f\|_1}$$

Question : Étant donnée $f: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $|\text{supp } f| \leq n$ et qui réalise $j_{1,\Lambda}(n)$, comment fabriquer de bonnes fonctions $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ à support fini ?

Tout d'abord, idées de preuve dans le cas de l'**OE** entre groupes **discrets**.

Rappel

$$j_{1,\Gamma}(n) \simeq \sup_{\substack{f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \\ |\text{supp } f| \leq n}} \frac{\|f\|_1}{\|\nabla f\|_1}$$

Question : Étant donnée $f: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $|\text{supp } f| \leq n$ et qui réalise $j_{1,\Lambda}(n)$, comment fabriquer de bonnes fonctions $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ à support fini ?

Solution : Pour presque tout $x \in X$, $c_{\Gamma,\Lambda}(\cdot, x): \Gamma \rightarrow \Lambda$ est une bijection. On considère donc $f_x: \gamma \in \Gamma \mapsto f(c_{\Gamma,\Lambda}(\gamma, x))$.

Tout d'abord, idées de preuve dans le cas de l'**OE** entre groupes **discrets**.

Rappel

$$j_{1,\Gamma}(n) \simeq \sup_{\substack{f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \\ |\text{supp } f| \leq n}} \frac{\|f\|_1}{\|\nabla f\|_1}$$

Question : Étant donnée $f: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $|\text{supp } f| \leq n$ et qui réalise $j_{1,\Lambda}(n)$, comment fabriquer de bonnes fonctions $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ à support fini ?

Solution : Pour presque tout $x \in X$, $c_{\Gamma,\Lambda}(\cdot, x): \Gamma \rightarrow \Lambda$ est une bijection. On considère donc $f_x: \gamma \in \Gamma \mapsto f(c_{\Gamma,\Lambda}(\gamma, x))$.

- ❶ $|\text{supp } f_x| = |\text{supp } f|$;
- ❷ $\|f_x\|_1 = \|f\|_1$;
- ❸ $\|\nabla f_x\|_1$? Plus difficile, contrôle en moyenne : $\int_X \|\nabla f_x\|_1 d\mu(x) \leq [\dots]$.

Tout d'abord, idées de preuve dans le cas de l'**OE** entre groupes **discrets**.

Rappel

$$j_{1,\Gamma}(n) \simeq \sup_{\substack{f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \\ |\text{supp } f| \leq n}} \frac{\|f\|_1}{\|\nabla f\|_1}$$

Question : Étant donnée $f: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $|\text{supp } f| \leq n$ et qui réalise $j_{1,\Lambda}(n)$, comment fabriquer de bonnes fonctions $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ à support fini ?

Solution : Pour presque tout $x \in X$, $c_{\Gamma,\Lambda}(\cdot, x): \Gamma \rightarrow \Lambda$ est une bijection. On considère donc $f_x: \gamma \in \Gamma \mapsto f(c_{\Gamma,\Lambda}(\gamma, x))$.

- ❶ $|\text{supp } f_x| = |\text{supp } f|$;
- ❷ $\|f_x\|_1 = \|f\|_1$;
- ❸ $\|\nabla f_x\|_1$? Plus difficile, contrôle en moyenne : $\int_X \|\nabla f_x\|_1 d\mu(x) \leq [\dots]$.

Principe des tiroirs :

on trouve $x_0 \in X$ tel que $\varphi\left(\frac{\|f\|_1}{\|\nabla f\|_1}\right) \leq \text{constante} \times \frac{\|f_{x_0}\|_1}{\|\nabla f_{x_0}\|_1}$.



Tout d'abord, idées de preuve dans le cas de l'**OE** entre groupes **discrets**.

Rappel

$$j_{1,\Gamma}(n) \simeq \sup_{\substack{f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \\ |\text{supp } f| \leq n}} \frac{\|f\|_1}{\|\nabla f\|_1}$$

Question : Étant donnée $f: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $|\text{supp } f| \leq n$ et qui réalise $j_{1,\Lambda}(n)$, comment fabriquer de bonnes fonctions $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ à support fini ?

Solution : Pour presque tout $x \in X$, $c_{\Gamma,\Lambda}(\cdot, x): \Gamma \rightarrow \Lambda$ est une bijection. On considère donc $f_x: \gamma \in \Gamma \mapsto f(c_{\Gamma,\Lambda}(\gamma, x))$.

- ❶ $|\text{supp } f_x| = |\text{supp } f|$;
- ❷ $\|f_x\|_1 = \|f\|_1$;
- ❸ $\|\nabla f_x\|_1$? Plus difficile, contrôle en moyenne : $\int_X \|\nabla f_x\|_1 d\mu(x) \leq [\dots]$.

Principe des tiroirs :

on trouve $x_0 \in X$ tel que $\varphi\left(\frac{\|f\|_1}{\|\nabla f\|_1}\right) \leq \text{constante} \times \frac{\|f_{x_0}\|_1}{\|\nabla f_{x_0}\|_1}$. □

Point crucial de la preuve : $c_{\Gamma,\Lambda}(\cdot, x): \Gamma \rightarrow \Lambda$ préserve les mesures de Haar.

Cas général de l'équivalence mesurée :

Rappel

$$R^\Gamma(x) := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \bullet x \in X_\Gamma \cap X_\Lambda\}.$$

Pour presque tout $x \in X_\Gamma \cap X_\Lambda$, $c_{\Gamma,\Lambda}(\cdot, x): R^\Gamma(x) \rightarrow R^\Lambda(x)$ est une bijection.

Cas général de l'équivalence mesurée :

Rappel

$$R^\Gamma(x) := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \bullet x \in X_\Gamma \cap X_\Lambda\}.$$

Pour presque tout $x \in X_\Gamma \cap X_\Lambda$, $c_{\Gamma,\Lambda}(\cdot, x): R^\Gamma(x) \rightarrow R^\Lambda(x)$ est une bijection.

Comme Γ et Λ sont dénombrables, $c_{\Gamma,\Lambda}(\cdot, x): R^\Gamma(x) \rightarrow R^\Lambda(x)$ préserve les mesures de Haar.

Faux pour des groupes non discrets, mais...

Cas général de l'équivalence mesurée :

Rappel

$$R^\Gamma(x) := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \bullet x \in X_\Gamma \cap X_\Lambda\}.$$

Pour presque tout $x \in X_\Gamma \cap X_\Lambda$, $c_{\Gamma,\Lambda}(\cdot, x): R^\Gamma(x) \rightarrow R^\Lambda(x)$ est une bijection.

Comme Γ et Λ sont dénombrables, $c_{\Gamma,\Lambda}(\cdot, x): R^\Gamma(x) \rightarrow R^\Lambda(x)$ préserve les mesures de Haar.

Faux pour des groupes non discrets, mais...

Proposition (Delabie – Llosa Isenrich – Tessera 2026+)

On peut modifier le couplage d'équivalence mesurée entre G et H , de sorte que

Cas général de l'équivalence mesurée :

Rappel

$$R^\Gamma(x) := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \bullet x \in X_\Gamma \cap X_\Lambda\}.$$

Pour presque tout $x \in X_\Gamma \cap X_\Lambda$, $c_{\Gamma,\Lambda}(\cdot, x): R^\Gamma(x) \rightarrow R^\Lambda(x)$ est une bijection.

Comme Γ et Λ sont dénombrables, $c_{\Gamma,\Lambda}(\cdot, x): R^\Gamma(x) \rightarrow R^\Lambda(x)$ préserve les mesures de Haar.

Faux pour des groupes non discrets, mais...

Proposition (Delabie – Llosa Isenrich – Tessera 2026+)

On peut modifier le couplage d'équivalence mesurée entre G et H , de sorte que

- *les nouveaux domaines fondamentaux X_G et X_H s'intersectent :*

$$\nu_{X_G}(X_G \cap X_H) = \nu_{X_H}(X_G \cap X_H) > 0;$$

Cas général de l'équivalence mesurée :

Rappel

$$R^\Gamma(x) := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \bullet x \in X_\Gamma \cap X_\Lambda\}.$$

Pour presque tout $x \in X_\Gamma \cap X_\Lambda$, $c_{\Gamma,\Lambda}(\cdot, x): R^\Gamma(x) \rightarrow R^\Lambda(x)$ est une bijection.

Comme Γ et Λ sont dénombrables, $c_{\Gamma,\Lambda}(\cdot, x): R^\Gamma(x) \rightarrow R^\Lambda(x)$ préserve les mesures de Haar.

Faux pour des groupes non discrets, mais...

Proposition (Delabie – Llosa Isenrich – Tessera 2026+)

On peut modifier le couplage d'équivalence mesurée entre G et H , de sorte que

- *les nouveaux domaines fondamentaux X_G et X_H s'intersectent :*

$$\nu_{X_G}(X_G \cap X_H) = \nu_{X_H}(X_G \cap X_H) > 0;$$

- *$\forall x \in X_G \cap X_H$, $c_{G,H}(\cdot, x): R^G(x) \rightarrow R^H(x)$ préserve les mesures de Haar ;*

Cas général de l'équivalence mesurée :

Rappel

$$R^\Gamma(x) := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \bullet x \in X_\Gamma \cap X_\Lambda\}.$$

Pour presque tout $x \in X_\Gamma \cap X_\Lambda$, $c_{\Gamma,\Lambda}(\cdot, x): R^\Gamma(x) \rightarrow R^\Lambda(x)$ est une bijection.

Comme Γ et Λ sont dénombrables, $c_{\Gamma,\Lambda}(\cdot, x): R^\Gamma(x) \rightarrow R^\Lambda(x)$ préserve les mesures de Haar.

Faux pour des groupes non discrets, mais...

Proposition (Delabie – Llosa Isenrich – Tessera 2026+)

On peut modifier le couplage d'équivalence mesurée entre G et H , de sorte que

- *les nouveaux domaines fondamentaux X_G et X_H s'intersectent :*

$$\nu_{X_G}(X_G \cap X_H) = \nu_{X_H}(X_G \cap X_H) > 0;$$

- *$\forall x \in X_G \cap X_H$, $c_{G,H}(\cdot, x): R^G(x) \rightarrow R^H(x)$ préserve les mesures de Haar ;*
- *sans changer les conditions d'intégrabilité des cocycles.*

Mieux ! On peut passer de $X_G \cap X_H$ à X_H tout entier :

Pour presque tout $x \in X_H$,
 $c_{G,H}(\cdot, x): R^G(x) \rightarrow c_{G,H}(R^G(x), x)$ préserve les mesures de Haar

- Il faut supposer $G \curvearrowright (X_H, \nu_H)$ ergodique (pas une hypothèse restrictive) ;

Mieux ! On peut passer de $X_G \cap X_H$ à X_H tout entier :

Pour presque tout $x \in X_H$,
 $c_{G,H}(\cdot, x): R^G(x) \rightarrow c_{G,H}(R^G(x), x)$ préserve les mesures de Haar

- Il faut supposer $G \curvearrowright (X_H, \nu_H)$ ergodique (pas une hypothèse restrictive) ;
- donc $R^G(x) \neq \emptyset$ pour presque tout $x \in X_H$
 $\leadsto$ on choisit $g_x \in R^G(x)$;

Mieux ! On peut passer de $X_G \cap X_H$ à X_H tout entier :

Pour presque tout $x \in X_H$,
 $c_{G,H}(\cdot, x): R^G(x) \rightarrow c_{G,H}(R^G(x), x)$ préserve les mesures de Haar

- Il faut supposer $G \curvearrowright (X_H, \nu_H)$ ergodique (pas une hypothèse restrictive) ;
- donc $R^G(x) \neq \emptyset$ pour presque tout $x \in X_H$
 $\leadsto$ on choisit $g_x \in R^G(x)$;
- $c_{G,H}(R^G(x), x) = c_{G,H}(\underbrace{R^G(x)g_x^{-1}}_{R^G(g_x \bullet x)}, \underbrace{g_x \bullet x}_{X_G \cap X_H}) c_{G,H}(g_x, x)$.

□

Mieux ! On peut passer de $X_G \cap X_H$ à X_H tout entier :

Pour presque tout $x \in X_H$,
 $c_{G,H}(\cdot, x): R^G(x) \rightarrow c_{G,H}(R^G(x), x)$ préserve les mesures de Haar

- Il faut supposer $G \curvearrowright (X_H, \nu_H)$ ergodique (pas une hypothèse restrictive) ;
- donc $R^G(x) \neq \emptyset$ pour presque tout $x \in X_H$
 $\leadsto$ on choisit $g_x \in R^G(x)$;
- $c_{G,H}(R^G(x), x) = c_{G,H}(\underbrace{R^G(x)g_x^{-1}}_{R^G(g_x \bullet x)}, \underbrace{g_x \bullet x}_{X_G \cap X_H}) c_{G,H}(g_x, x)$. □

On trouve une **nouvelle** preuve du théorème de Delabie, Koivisto, Le Maître et Tessera, qui

- s'étend facilement aux groupes localement compacts ;
- s'articule autour du fait suivant :
 « Pour presque tout $x \in X_H$, $c_{G,H}(\cdot, x): R^G(x) \rightarrow c_{G,H}(R^G(x), x)$ préserve les mesures de Haar » ;

Dernier point important : Comment passer de $\int_G \dots d\lambda_G(g)$ à $\int_H \dots d\lambda_H(h)$ en utilisant le changement de variable $c_{G,H}(\cdot, x): R^G(x) \rightarrow c_{G,H}(R^G(x), x)$?

Idée : Il faut réduire G à $R^G(x)$, et H à $c_{G,H}(R^G(x), x)$, en **moyennant**.

Soit $\theta: G \rightarrow \mathbb{R}_+$. Par le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_{X_H} \int_{R^G(x)} \theta(g) d\lambda_G(g) d\nu_H(x) &= \int_{X_H} \int_G \theta(g) 1_{g \bullet x \in X_G \cap X_H} d\lambda_G(g) d\nu_H(x) \\ &= \nu_H(X_G \cap X_H) \times \int_G \theta(g) d\lambda_G(g) \end{aligned}$$

« À une erreur multiplicative près, et pour beaucoup de $x \in X_H$, on a $\int_G \theta(g) d\lambda_G(g) \approx \int_{R^G(x)} \theta(g) d\lambda_G(g)$. »